SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CONFÉRENCES

DE LA

RÉUNION INTERNATIONALE DES MATHÉMATICIENS

TENUE A PARIS EN JUILLET 1937

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1939

CONFÉRENCES

DE LA

RÉUNION INTERNATIONALE DES MATHÉMATICIENS

TENUE A PARIS EN JUILLET 1937

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

111060 Quai des Grands-Augustins, 55

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CONFÉRENCES

DE LA

RÉUNION INTERNATIONALE DES MATHÉMATICIENS

TENUE A PARIS EN JUILLET 1937

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1939

A

M. Yvon DELBOS

A

M. Henri LAUGIER

Dont le bienveillant appui
a permis l'édition des
Conférences de juillet 1937

AVANT-PROPOS

La *Réunion internationale des mathématiciens*, tenue à l'occasion de l'Exposition de 1937, avait été décidée en principe par le Conseil de la Société mathématique de France, dans sa Séance du 19 janvier 1937. Elle a pu être organisée grâce à une subvention de Monsieur le Ministre des Affaires étrangères. Une seconde subvention, de la même source, nous permet la publication des Conférences.

C'est donc d'abord à Monsieur le Ministre Yvon Delbos et à Monsieur le Professeur Laugier, Directeur du Cabinet du Ministre, que doivent aller nos remerciements. La Société Mathématique de France est heureuse de leur dédier le présent volume, en hommage de sa profonde gratitude.

La *Réunion internationale des Mathématiciens* a groupé plus de 200 adhésions de membres français ou étrangers de la Société. Les Conférences ont eu lieu dans les matinées des 7, 8, 9, et 10 juillet. Le 9 un déjeuner amical réunissait les participants, au restaurant du premier étage de la Tour Eiffel, puis la promenade en vedette sur la Seine et la visite, organisées par le Comité d'accueil de l'Exposition. Je pense donner ici une opinion unanime en constatant que l'initiative prise par le Conseil de la Société mathématique a été heureuse et en souhaitant que d'autres occasions permettent d'envisager de nouvelles Réunions, où nous retrouverons la même atmosphère plaisante d'intimité et de cordialité.

Qu'il me soit enfin permis d'écrire en tête de ce Volume les noms de ceux qui ont donné leur effort à l'Œuvre collective :

Les Conférenciers : MM. Arnaud Denjoy, Sergesco, Marchaud, Gonseth, Godeaux, van der Corput, Levi-Civita, Volterra, Marcel Riesz, Zaremba, de Mises, J.-C. Young, qui ont grandement honoré la Société en répondant à son appel et dont le talent a assuré le succès de notre Réunion;

Les Présidents des Séances : MM. Émile Borel, Hadamard, Fréchet, Lebesgue, anciens présidents de la Société mathématique, qui ont bien voulu la faire bénéficier à nouveau de leur autorité;

Les Secrétaires de la Société : MM. Georges Darmois et Gibrat, qui se sont dépensés sans compter, ont eu l'initiative des nombreuses démarches nécessaires et ont assuré l'organisation de la Réunion, en liaison avec le Comité des Congrès de l'Exposition 1937.

A tous j'exprime, au nom de la Société mathématique, nos sentiments de sincère reconnaissance.

J'ai encore à remercier nos excellents Imprimeurs Gauthier-Villars, pour la parfaite présentation du présent Volume de Conférences.

J. PÉRÈS.

CONFÉRENCES

DE LA

RÉUNION INTERNATIONALE DES MATHÉMATICIENS

TENUE A PARIS EN JUILLET 1937

Journée du 7 Juillet 1937.

ASPECTS ACTUELS

DE LA

PENSÉE MATHÉMATIQUE [1]

Par M. A. DENJOY.

Le Bureau de la Société mathématique de France a jugé que la présence à Paris de nombreux mathématiciens français et étrangers, attirés par le désir de visiter l'Exposition internationale, fournissait à notre association la possibilité, par la tenue de quelques séances exceptionnelles, de faire acte de participation effective à la grande et brillante manifestation qui doit se dérouler pendant plusieurs mois sur les rives de la Seine.

Il ne s'agit donc pas d'un vrai Congrès, au sens habituellement réservé à ce terme, l'objet d'une réunion de cette dernière sorte étant d'imprimer un nouvel élan aux progrès de la science, par la communication que chaque membre est invité à faire à l'assemblée des derniers résultats de ses travaux.

(1) Conférence inaugurale de la réunion internationale des mathématiciens, organisée à Paris par la Société mathématique de France, les 7, 8, 9 et 10 juillet 1937.

Le but de l'Exposition est de mettre sous les yeux du public un tableau d'ensemble des ressources essentielles dont l'art et la technique disposent à ce jour et des réalisations caractéristiques tirées de ces moyens. Chargé de donner la conférence inaugurant ces réunions, j'ai pensé me montrer davantage fidèle à l'esprit dont s'est inspiré la conception de la grande kermesse des cultures humaines, si, au lieu de décrire les résultats récemment acquis dans un chapitre particulier des mathématiques, je tentais de présenter sous une vue synthétique, la démarche de l'activité mathématique dans les toutes dernières décades, le choix de ses objets, les analogies et les oppositions qu'elle offre avec les autres modes contemporains de création mentale, les tendances dont il semblerait souhaitable qu'elle y persistât ou qu'elle les adoptât.

*
* *

La science est un phénomène social qu'il n'est pas possible d'isoler et dont les caractères, à chaque époque déterminée, reflètent les conditions générales de la civilisation où elle se développe : conditions de la vie spirituelle et imaginative s'exprimant dans les arts et les lettres, et même conditions économiques et politiques, influençant toutes les autres.

Depuis la guerre mondiale de 1914-1918, la production mathématique a cru en intensité dans de très fortes proportions. Le fait a été moins sensible dans les régions appartenant à des pays constitués avant 1914 que dans celles dont les nouveaux États ont été formés. Dans ces derniers, un nationalisme très vif, mais de la nature la plus louable, a poussé les gouvernements et les peuples à la fondation de nombreuses universités dont le personnel professoral s'est pris d'une très noble émulation pour rivaliser avec les représentants des écoles mathématiques étrangères les plus réputées, et pour tenter, souvent avec succès, de les surpasser.

La science a vu son prestige sortir grandi de la guerre. C'est une amère constatation à faire. Mais les splendides bienfaits qu'auparavant elle avait généreusement dispensés aux hommes les avaient beaucoup moins touchés et émus que n'ont fait les ruines et les désastres répandus à profusion entre les peuples de l'Europe par la technique issue des sciences. L'humanité, indifférente et dédaigneuse à l'égard de la science utile et secourable, a été saisie de considération et de respect devant la science génératrice d'effets terribles et néfastes.

Indépendamment de toute attente de satisfactions à l'amour-propre national dans la compétition perpétuellement ouverte entre les savants des divers pays, les peuples ou leurs chefs qualifiés ont compris que, non seulement dans la guerre industrielle constamment déclarée sur le terrain économique, mais aussi dans la guerre des armes dont l'éventualité ne cesse d'être une menace suspendue sur tout l'univers, l'existence d'un haut potentiel scientifique intérieur est indispensable à la sécurité d'un État.

L'organisation de la recherche scientifique a été développée ou créée dans de nombreux pays. En mathématiques elle s'est accomplie par la simple augmentation numérique du personnel occupé à cet objet. La multiplication des emplois universitaires, principalement des postes subalternes ou auxiliaires, a permis de donner des moyens d'existence à des hommes particulièrement bien doués et avides de consacrer leurs loisirs à la découverte. Mais il s'agit ici d'émoluments accordés en balance avec l'accomplissement réciproque d'une prestation matérialisée sous forme concrète. Ce qui au contraire a innové, c'est la conception de la recherche scientifique regardée comme un service public indépendant, justifiant par son seul objet et sans avoir besoin de se compléter par l'exercice d'un emploi défini, le concours financier de l'État.

De son côté l'initiative privée a multiplié les bourses et subventions.

Quels que soient les moyens mis en œuvre, on peut voir dans ces diverses mesures l'application à la recherche scientifique des méthodes intensives utilisées depuis la guerre dans tout le domaine économique. Pour la science aussi, le résultat des larges octrois de crédit a été une sorte d'inflation des produits mis en circulation. Mais comme ceux-ci ne font l'objet d'aucun marché, aucune dépréciation des quantités offertes n'a provoqué aucune crise.

Cependant, et sans qu'il soit nécessaire pour cela de nous rallier à l'ensemble de la doctrine marxiste, pourquoi ne reconnaîtrions-nous pas ici encore l'action déterminante, certifiée par le matérialisme dialectique, de facteurs strictement économiques sur des événements en apparence aussi éloignés d'eux que le sont les vicissitudes de la découverte dans la science pure. Des esprits naturellement fertiles sont artificiellement maintenus dans un état de stérilité par l'astreinte à des besognes serves, sous l'empire des nécessités alimentaires. Qu'une occasion fortuite, ou résultant d'une décision délibérée, les allège de cette chaîne, et ces intelligences, se fécondant par l'exercice de la méditation poursuivie à loisir, conçoivent et enfantent des idées nouvelles.

*
* *

Par quels effets s'est manifesté cet accroissement considérable du personnel consacré à la recherche scientifique dans le monde ?

Dans maint domaine des mathématiques, le sol a été fouillé, tourné, retourné, avec une minutie, une pénétration dont il n'existait, je crois, guère d'exemples avant la guerre. Autrefois, des chercheurs isolés s'attachaient à découvrir dans les ordres de questions choisis par eux, quelques faits capitaux éclairant la nature des phénomènes et dévoilant les notions fondamentales dans la catégorie étudiée. Leur investigation s'arrêtait à la détermination de ces points culminants, de ces carrefours, fixant la topographie et la circulation des idées dans cette région du nombre. Le plus souvent la carte de celle-ci était tenue dès lors pour suffisamment établie. Les voies permettant d'approcher utilement tout lieu de ce territoire étaient regardées comme assez nettement définies par cette information élective. La connaissance détaillée du domaine n'éveillait pas de curiosité plus exigeante.

C'est une sorte d'organisation du travail par équipe avec la division correspondante de la tâche, que l'on croit observer dans maint pays, même dans ceux dont l'esprit obstinément individualiste semblait le plus réfractaire à cette méthode. Ici la science paraît encore modeler les procédés de son activité sur ceux de l'industrie, où progressivement l'entreprise conçue et menée par un seul disparaît devant la grande concentration, anonyme et collective, des ressources, de l'outillage et des initiatives. L'art et la littérature, où non seulement l'inspiration, mais aussi la réalisation formelle de l'œuvre, gardent irréductiblement un caractère personnel, subjectif, indivisible, s'adaptent moins aisément aux nouvelles conditions de la vie sociale de l'humanité. Le parallélisme si souvent observé jusqu'ici entre les attitudes et les dispositions des esprits à l'égard de l'invention créatrice dans les divers ordres ne manquerait pas de s'arrêter si l'individualisme venait à ne pas recouvrer des droits suffisants.

Quels sont les chapitres des Mathématiques où les efforts de la recherche se sont portés avec le plus d'intensité depuis vingt ans ? Quelle est l'étendue des découvertes et quel degré d'intérêt présentent-elles ? Essayons de répondre très succinctement à ces questions.

La fonction harmonique, qui, à l'intérieur de toute région comprise dans son domaine de définition et limitée par une courbe plane ou par une variété homéomorphe à la surface d'une sphère, d'une hypersphère, réalise entre les valeurs prises par cette fonction sur la frontière de la région, une liaison étendant de la façon la plus simple la fonction linéaire d'une variable, la fonction harmonique joue dans l'Analyse un rôle capital que les applications à la Physique ne cessent pas de souligner.

Dans le plan, la théorie des fonctions harmoniques peut servir de base ou au contraire de complément, selon que l'on adopte la conception de Riemann ou celle de Cauchy, à la théorie des fonctions d'une variable complexe. De ce point de vue, aussi bien que pour répondre au besoin d'expliquer les propriétés des fonctions d'une variable réelle développable en série de Taylor, l'intérêt de la théorie des fonctions d'une variable complexe ne saurait être exagéré, ni pour le présent, ni pour l'avenir. Dans ce domaine, constamment cultivé depuis un siècle, mais avec des méthodes qui après Cauchy et Weierstrass n'avaient plus été sensiblement perfectionnées, la transformation et le progrès des connaissances ont été vraiment prodigieux depuis la guerre.

C'est principalement l'étude de la fonction uniforme autour d'un point singulier essentiel isolé, ou dans un cercle d'holomorphie, qui a été approfondie au point de fournir dans bien des cas la marge numérique exacte de variation possible d'une fonction analytique vérifiant des conditions données. Dans un domaine où beaucoup des meilleurs analystes du temps présent ont donné leur mesure, il serait téméraire de prétendre citer des noms sans s'exposer à de graves omissions. Il semble toutefois équitable d'énumérer, parmi les puissantes méthodes nouvelles auxquelles ont été dus les principaux progrès accomplis : l'introduction de la fonction caractéristique de R. Nevanlinna, l'emploi avec P. Montel des familles normales après un retour à la fonction modulaire d'où M. Picard avait jadis tiré le germe de toutes ces théories, enfin la représentation conforme si efficacement utilisée par Carleman et Ahlfors.

L'étude conjuguée des valeurs prises par les fonctions des sortes indiquées et de l'ensemble des points où ces fonctions prennent ces valeurs, est à proprement parler l'examen de la fonction inverse. On sait par un théorème célèbre de Poincaré, que la fonction analytique la plus générale est une fonction uniforme d'une fonction inverse de fonction uniforme.

Les recherches de Painlevé sur les équations différentielles à points critiques fixes se heurtaient à de grandes difficultés provenant de l'insuffisance, à leur époque, de la théorie générale des singularités des fonctions uniformes. Il serait intéressant que cette dernière théorie réalisât, dans le cas le plus étendu, des progrès comparables à ceux qu'elle a effectués dans les deux cas restreints principalement étudiés jusqu'ici. Le problème de Painlevé offre à la théorie des fonctions de variable complexe l'une des plus belles applications qu'elle puisse envisager. Il conviendrait, à l'exemple de M. Garnier et plus lointainement de M. Chazy, de continuer dans cette direction l'œuvre du glorieux savant qui a si hautement honoré la Faculté des Sciences de Paris.

Les séries trigonométriques sont à l'origine des notions précises modernes sur la convergence des suites, la continuité des fonctions, leur dérivabilité distinguée de la continuité, l'intégration. L'analyse a dû changer de caractère, détacher sous le nom de Théorie des fonctions de variables réelles l'un de ses plus importants rameaux, pour pouvoir envelopper le plein épanouissement des phénomènes numériques présentés par les séries trigonométriques. Celles-ci offrent encore cet intérêt de définir une fonction harmonique à l'intérieur d'un cercle par ses valeurs limites aux extrémités des divers rayons, et les séries trigonométriques peuvent prétendre bénéficier à ce titre de l'importance attachée aux fonctions harmoniques dans l'Analyse.

Il serait toutefois permis de douter que l'immense production consacrée dans ces dernières années à cette forme de développement numérique ne dépassât pas nettement la portée des enseignements généraux que nous pouvons attendre des résultats obtenus, si les séries trigonométriques ne servaient pas d'introduction aux séries de fonctions orthogonales dont l'intérêt ne cesse aujourd'hui de croître.

L'étude des fonctions de Baire, des ensembles boréliens et analytiques, et même des fonctions et ensembles plus généraux, a été poussée par l'école polonaise et certains membres de l'école de Moscou, à un degré de profondeur et de généralité qui confond l'esprit d'admiration. On aime penser que si cette classe de travaux venait à être brusquement suspendue, les résultats déjà acquis permettraient pendant un siècle de répondre par oui ou par non à toutes les questions qui, dans les diverses branches des mathématiques, se poseront touchant la distinction du possible et de l'impossible dans la nature des fonctions introduites par les problèmes de l'Analyse.

Une autre section que son énorme développement depuis vingt ans range également parmi les sciences presque neuves, est la Topologie.

Celle des espaces euclidiens existait déjà dans quelques-unes de ses idées fondamentales. Son intervention est indispensable, et elle le sera toujours davantage, dans l'étude qualitative des trajectoires réelles et des surfaces intégrales définies par les équations différentielles ou aux dérivées partielles. La mécanique analytique de Birkhoff qui, avec ses problèmes sur la transitivité, les caractères des systèmes ergodiques, attire tant de chercheurs, est évidemment tributaire de la topologie euclidienne dont les progrès ne sauraient être trop favorisés.

La topologie générale, de création plus récente que la première et où il est superflu de rappeler la part revenant à M. Fréchet, rend déjà des services à l'Analyse, ne serait-ce que dans les questions où interviennent une infinité de variables.

Enfin le calcul des probabilités a connu lui aussi un afflux de conceptions et de méthodes nouvelles qui ont grandement modifié et accru l'étendue de cette doctrine.

Les rubriques que j'ai citées, théorie des fonctions de variables complexes, séries trigonométriques, fonctions de Baire et ensembles cartésiens, topologie, calcul des probabilités, ne comprennent qu'une faible part des sujets abordés depuis vingt ans par les mathématiciens. Je les ai signalées parce qu'elles figurent néanmoins, si je ne me trompe, les principales zones où les efforts concourants, sans être nécessairement concertés, de mathématiciens appartenant souvent à des pays très divers, se sont massivement portés.

Dans la plupart des autres domaines de notre science, la recherche a gardé son caractère individualiste, étant inspirée, à la façon romantique, par le besoin de trouver une explication et une cause à des faits observés par l'esprit, et non pas engagée pour obéir à l'émulation de l'exemple.

*
* *

En mathématiques, et aussi pour l'ensemble des sciences dont la croissance depuis un siècle paraît s'amplifier à une allure de représentation exponentielle, l'esprit se sent menacé de submersion par cette marée montante de faits, de résultats et de notions. La somme des images qu'un cerveau humain peut conserver pour les utiliser éventuellement, les appeler à la lumière de la réflexion consciente, est évidemment limitée. La déperdition continuelle de celles qui s'effacent définitivement et disparaissent, finit par compenser et par dépasser l'apport des acquisitions nouvelles.

Le travail de réduction des connaissances de chaque ordre aux idées dominantes et à quelques idées satellites, à la stricte armature où s'attachent toutes les parties du corps d'une même doctrine, ce travail s'imposera si l'on veut pouvoir maintenir l'existence d'une culture générale, même limitée à la seule discipline mathématique. Le rôle de la critique assumant la charge de l'examen et de l'estimation des derniers travaux parus, ne cessera pas de grandir. Pour la synthèse organique des divers éléments de chaque théorie, c'est à l'épreuve de l'exposé didactique que les idées maîtresses s'ordonnent, se hiérarchisent et que la broussaille des faits secondaires, les branches mortes sont tranchées et élaguées, afin d'aérer et montrer à la vue les troncs vivaces qui forment la forêt nette et praticable.

Je suppose qu'à la fin de la Renaissance et au début du dix-septième siècle, les géomètres avaient la mémoire chargée des propriétés d'une foule de courbes remarquables, étudiées depuis l'antiquité, et pour chacune desquelles la construction des tangentes, les relations angulaires, segmentaires, les alignements rectilignes ou circulaires étaient révélés par des considérations et des règles propres à chaque cas. On devait pareillement savoir résoudre de nombreux types d'équations algébriques, chacun suivant un procédé adapté à l'espèce étudiée. La géométrie analytique, le calcul différentiel, ramenant cette vaste diversité à un canon unique, ont fait progressivement tomber dans l'inattention et dans l'oubli cette riche collection de recettes et d'ingénieux artifices.

Il convient d'admettre que, parallèlement à cette prolifération redoutablement accélérée se manifestant sur les rameaux de l'arbre mathématique, de puissantes conceptions générales s'élaborent qui, fournissant des explications synthétiques immédiates, frappent d'une marque d'inutilité et vouent à un abandon inévitable, les causalités circonstancielles antérieurement invoquées.

On ne peut pas tous les jours découvrir une géométrie cartésienne, un calcul infinitésimal, une théorie des ensembles pour lancer la faux dans les herbages sans vitalité et féconder le sol qui les portait avec de vastes terrains alentour.

Mais l'inévitable semble bien être que, l'ensemble des points extrêmes de la connaissance s'éloignant toujours davantage, le champ accessible à une même intelligence humaine sera de plus en plus étroit, les connexions avec les champs voisins seront de plus en plus ignorées. Les raisons des techniques les plus perfectionnées et dont maints détails seront fondés sur la science la plus récente deviendront de moins en moins familières aux hommes chargés de les utiliser. Qu'une catastrophe, de nature politique ou autre, fasse rejeter comme un odieux fardeau le souci de la culture intellectuelle, et l'humanité deviendra pareille à ces espèces industrieuses figées qui, ayant atteint l'extrême limite de leur faculté de création et perdu la trace des voies suivies par leurs individualités initiatrices, ne savent plus qu'indéfiniment répéter les mêmes gestes et réédifier les mêmes ouvrages selon de rigides normes gardant pour elles tout leur secret.

* * *

Sans nous arrêter à ces décourageantes anticipations, encore extrêmement lointaines n'en doutons pas, abordons un sujet bien digne d'attention, savoir l'examen des conditions les plus favorables où grandit et mûrit le génie des hommes dont les conceptions originales, presque soudainement surgies, portent la révolution dans une science déjà constituée, comme le firent Descartes et Leibniz pour nous en tenir à des exemples lointains et capitaux, ou en tirent une nouvelle du néant, comme Pascal quand il créa le calcul des probabilités.

Les meilleures de ces conditions sont aisées à énoncer : le loisir assuré, l'entière liberté laissée à l'esprit d'errer à sa guise aussi longtemps qu'il n'aura pas été irrésistiblement agrippé par un objet.

La science est un fruit social et l'organisation de la société retentit profondément sur l'évolution de la science. Si la transformation de l'ordre actuel se poursuit dans le sens où elle paraît tendre, il est peu probable que le libéralisme de l'État excède l'octroi à un jeune savant de quelques années de loisirs complets, mais avec l'obligation morale d'orienter normalement ses pensées vers un ordre de recherches déterminé. Ces facilités accordées sont grandes. Elles ne sont peut-être pas suffisantes à l'âge où la personnalité doit quêter autour d'elle les éléments qui lui donneront son caractère.

Au temps déjà presque révolu où un homme pouvait vivre du corps social sans être tenu de rien lui restituer en échange, les conditions que j'ai dites étaient réalisées pour quelques privilégiés. Le rendement du système, avouons-le, n'était pas considérable. Il produisait surtout beaucoup de riches oisifs qui n'ajoutaient rien par eux-mêmes ni aux idées ni aux mœurs. Mais quand il favorisait une nature exceptionnellement douée, il inscrivait à son actif un succès inestimable.

Suivons un instant Descartes et Leibniz dans la période de leur existence qui, débutant au terme de leur adolescence studieuse, s'arrête au seuil de leur principale découverte mathématique.

Descartes, dont le Discours de la Méthode va être célébré cette année dans son troisième centenaire, était un propriétaire assez considérable du Poitou. Après avoir achevé ses études de droit, il quitte sa province, surtout pour garder la libre disposition de ses loisirs, que les obligations mondaines attachées à la position de sa famille n'auraient pas manqué de troubler. Il s'expatrie, s'efforce selon son expression d'approcher des hommes de toute condition, s'engage comme volontaire sans solde, pour voir la guerre. Et après dix ans de pérégrinations mal connues, il trouve son refuge en Hollande, où, dans le parfait isolement rêvé par lui, il s'abandonne à ses méditations.

Leibniz fut amené aux mathématiques par ses conversations avec les géomètres parisiens au cours d'un séjour qu'il fit chez nous. Il amusait beaucoup ses interlocuteurs par ses inductions hâtives et les raisonnements boîteux dont il les étayait. Le rationalisme de sa philosophie se contentait d'une logique trop accommodante. Mais Leibniz apprit vite à corriger les intempérances de sa raison. De plus modestes exemples nous ont été donnés, depuis, de mathématiciens venus eux aussi de la philosophie et demeurés longtemps sujets à de fâcheuses défaillances de rigueur logique. Mais il faut reconnaître ce qu'une forte culture philosophique inspire irrévocablement à l'esprit, savoir l'ambition de monter aux sources de la causalité et l'aversion des problèmes d'objet restreint. Le mathématicien et généralement le vrai savant s'effarent de la témérité du philosophe. Mais le souci de ne marcher qu'à pas assurés maintient peut-être trop obstinément les yeux baissés vers le sol et empêche le regard de se porter au loin.

Avec le fermier-général Lavoisier, créateur de la Chimie moderne, nous avons là l'exemple de trois hommes dont la prodigieuse originalité scientifique a pris son essor dans une existence affranchie de tout souci matériel et dont la pensée n'a jamais cessé d'être entièrement libre de choisir son objet et même de n'en choisir aucun. Après l'acquisition, au cours de la jeunesse, de connaissances générales dont subsiste plus tard dans le souvenir uniquement la collection de ces faits-repères sur lesquels nos jugements s'appuient et dont ils doivent toujours respecter la donnée, l'esprit de ces hommes vagabonde sans loi ni contrainte, et c'est plus tard qu'enrichi de disciplines mentales forgées à mille expériences diverses dont les plus fugitives ne sont pas les moins pénétrantes, il revient avec des yeux reposés et frais vers cette doctrine dont seuls les éléments fondamentaux, indestructibles, sont demeurés en lui.

La chronologie des publications ne saurait rien prouver touchant l'ordre de gestation intime des idées essentielles de l'œuvre. Leibniz, Descartes, peut-être plus encore que Pascal, n'ont pas cessé depuis l'éveil de leur raison, d'être des philosophes. Le jour où leur esprit, mûri par les réflexions, pour la première fois depuis l'adolescence, rencontre les mathématiques, il trouve en elles d'abord une captivante diversion, puis un dressage aux habitudes de correction logique. Dès lors l'esprit de géométrie pénètre de sa solidité et de sa vigueur leurs conceptions philosophiques, en même temps que le goût des spéculations étendues à de vastes objets les détournent des horizons bornés pour les diriger vers les sommets commandant de vastes panoramas.

*
* *

Après nous être inquiétés des moyens de susciter l'éclosion de grandes créations scientifiques, parlons enfin de l'orientation souhaitable des mathématiques.

Le profane n'imagine pas la mathématique autrement qu'un assemblage de chaînes déductives formées de théorèmes successifs. Il ne soupçonne pas que chez nous aussi la question se pose de porter des jugements de valeur. Si une rigueur logique hors de contestation est indispensable pour qu'un ouvrage puisse revendiquer une place en mathématiques, cette condition, obligatoirement remplie par les œuvres relevant de cette discipline, ne leur confère pas à toutes un rang égal. La hiérarchie adoptée ne sera pas indépendante du mathématicien appelé à la définir. Même si les qualités inventives de l'auteur sont pareillement appréciées de tous ses confrères, ceux-ci différeront habituellement d'avis, concernant le degré d'intérêt qu'il convient de prêter au sujet traité.

Les mathématiques sont l'honneur de l'esprit humain, a dit Jacobi. Aussi les mathématiques, comme l'honneur, ne sont-elles jamais trop pures aux yeux de quelques-uns. Il n'est cependant pas opposé à un véritable esprit philosophique de souhaiter que les mathématiques, loin de former un organisme sans connexion avec l'ensemble des autres connaissances humaines, se développent en relation d'homogénéité tout au moins avec les sciences les plus voisines d'elles et lui faisant le plus d'emprunts.

Les séries trigonométriques, situées à la source de toutes les notions fondamentales de l'Analyse moderne, ont été imposées par la Physique aux géomètres, qui se sont d'abord débattus de toutes leurs forces pour repousser loin d'eux ce cadeau pourtant sans prix. Les fonctions harmoniques, les équations différentielles ou aux dérivées partielles ont été suggérées à l'Analyse par la Physique, la Mécanique ou la Géometrie. Une catégorie mathématique joue un rôle d'autant plus important dans une théorie et elle brille de propriétés d'autant plus remarquables qu'elle offre un caractère davantage interthéorique, quand elle se présente aussi dans une seconde doctrine mathématique, ou même interscientifique, si une autre science que la mathématique en impose la considération.

Aussi peut-on raisonnablement soutenir que les équations de la Physique et de la Mécanique sont nécessairement une source de problèmes mathématiques de très vaste intérêt.

On me répondra que la Physique, l'Astronomie ont utilisé de la façon la plus adéquate qu'on eût pu souhaiter certaines théories mathématiques conçues dans la voie la plus éloignée de toute visée d'application. Il est vrai, mais on ne peut porter un jugement aussi favorable sur toutes les parties des mathématiques, même parmi les plus anciennes. En réalité, le mathématicien doit posséder un don de discernement lui permettant de pressentir si les faits qu'il met en évidence dans une étude d'objet défini, seront ou non rencontrées également dans d'autres parties des mathématiques. Chaque analyste doit porter à tout instant sur son ouvrage un jugement de valeur. Un sens spécial doit l'avertir s'il crée du formel ou s'il découvre du réel.

*
* *

Sous le titre un peu vague de cette conférence, j'ai voulu non pas présenter un dessin de ce qui fait l'objet présent de la recherche mathématique, cette tâche devant être excellemment remplie par les très éminents géomètres chargés des conférences suivantes, mais j'ai voulu situer à ce jour la Mathématique dans le social. Au moment où l'humanité se trouve à une croisée, à un carrefour de chemins et où la politique tend à s'annexer tous les modes d'activité, matérielle ou spirituelle, et la science aussi bien, il m'a paru intéressant et utile de vous convier à songer avec moi aux conditions idéales dans lesquelles la Mathématique accomplirait le mieux ses progrès et rendrait à l'homme les hautes satisfactions et les services qu'il attend d'elle.

ARNAUD DENJOY.

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES ENSEMBLES

Par M. A. MARCHAUD.

L'indulgence d'une vieille amitié me vaut l'honneur de représenter à ces Journées les Mathématiques provinciales. C'est un honneur auquel je suis particulièrement sensible et pour lequel je remercie très vivement le Comité de la Société Mathématique.

La question qui va nous occuper est une petite remarque géométrique très simple dont on peut, je crois, tirer beaucoup. Il s'agira d'*ensembles fermés* ou de *continus* de l'espace euclidien ordinaire et de leurs propriétés différentielles du premier ordre. On pourrait, comme je l'ai fait ailleurs [1], considérer des ensembles moins particuliers que les ensembles fermés. Je me bornerai néanmoins à ceux-ci, qui suffiront pour montrer l'intérêt de la remarque annoncée. Il est d'ailleurs toujours facile de déterminer quelles sont les hypothèses strictement nécessaires à la validité d'une démonstration.

On m'excusera de ne pas apporter de résultats nouveaux, c'est-à-dire que je n'aie publiés antérieurement. Mais comme ceux dont nous allons parler sont, je crois, peu connus, le mal ne sera pas trop grand.

1. Les éléments différentiels du premier ordre sont les *demi-tangentes* et les *tangentes*. Soit a un point d'un ensemble E, toute

[1] A. MARCHAUD, *Sur les demi-sécantes limites et sur les semi-tangentes* (*C. R.*, t. 194, p. 948, 14 mars 1932); *Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles* (*Journ. Math. p. et appl.*, t. XII, Fasc. IV, 1933).

Dans la Note et le Mémoire précédents, j'appelais « *semi-tangente* » ce que j'appelle ici « *demi-tangente* ».

demi-droite d'origine a contenant un point m de l'ensemble est une *demi-sécante* à E issue de a. Les éléments d'accumulation des demi-sécantes en a sont les *demi-sécantes limites* en ce point. Celles particulières pour lesquelles les points m tendent vers a sont par définition les *demi-tangentes*. Si l'ensemble E représente les variations d'une fonction continue, les demi-tangentes correspondent aux nombres dérivés, médians ou extrêmes, selon la dénomination de M. Denjoy. Lorsque E est un arc simple, les expressions demi-tangente à droite (ou postérieure), demi-tangente à gauche (ou antérieure), ont un sens évident.

L'ensemble des demi-tangentes en un point est en quelque sorte un premier résultat de l'examen local de l'ensemble par l'intérieur, c'est-à-dire avec le point de vue placé au point considéré. Les tangentes sont au contraire des résultats d'une observation locale par l'extérieur. Si l'on demande à un élève de tracer une tangente à une courbe dessinée sur une feuille de papier, il placera sa règle de manière à *toucher* la courbe. C'est qu'il a intuitivement la vraie notion de tangente : Une *tangente* en un point a est une droite d'accumulation de sécantes à l'ensemble passant par deux points (de l'ensemble) qui tendent vers a. Bien entendu demi-tangentes et tangentes n'existent qu'en un point d'accumulation. M. Georges Bouligand a appelé *contingent* en un point l'ensemble des demi-tangentes en ce point, et *paratingent* celui des tangentes. Ce sont là des questions de terminologie sans grande importance. Personnellement je préfère dire : demi-tangente plutôt que : rayon du contingent.

Si j'ai rappelé la définition des tangentes parallèlement à celle des demi-tangentes, c'est uniquement pour bien préciser le langage. En fait, les propriétés différentielles dont nous allons parler ne font intervenir que les demi-tangentes. Comme on le verra, cette restriction apparente tient à la nature des choses. Il y a en effet une question d'orientation, mise en évidence par M. A. Denjoy dans son Mémoire fondamental *Sur les nombres dérivés des fonctions continues* [1], sur laquelle nous reviendrons tout à l'heure.

2. Il est maintenant bien connu que les nombres dérivés peuvent remplacer les dérivées dans certains énoncés classiques. M. H. Lebesgue, dont les idées et les travaux ont tant contribué au dévelop-

---

[1] A. Denjoy, *Sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*Journ. de Math. p. et appl.*, t. I, 1915, p. 209).

pement des méthodes directes pour l'étude des problèmes de Géométrie différentielle, a montré qu'*une fonction continue possédant en chaque point et pour un côté invariable un dérivé nul* (*médian ou extrême*) *est une constante* ([1]). Cet énoncé est celui de M. A. Denjoy, qui a donné du résultat de M. H. Lebesgue une démonstration très élégante, ne faisant pas intervenir comme celle de M. Lebesgue, des considérations analogues à celles du Théorème des accroissements finis ([2]). Traduisant géométriquement la démonstration de M. Denjoy, M. Georges Durand a généralisé la proposition précédente et obtenu notamment les résultats suivants.

Un arc simple quelconque, plan ou gauche, dont le contingent postérieur (*ou antérieur*) *en tout point contient une demi-droite équipollente à une demi-droite fixe, se réduit à une parallèle à cette demi-droite.*

Si un arc simple est tel que le contingent postérieur (*ou antérieur*) *en chaque point* M *contient une demi-droite* MT *parallèle à un plan fixe et toujours située d'un même côté d'un plan* Π *passant par* M *et restant parallèle à lui-même, cet arc est tout entier contenu dans un plan parallèle à* Π.

Ces énoncés (et leurs démonstrations) ont été publiés par M. G. Durand ([3]) dans une Note aux *Comptes rendus* parue le 14 mars 1932, Note reproduite par M. G. Bouligand dans son *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, page 209. Voici, par exemple, comment peut se démontrer la première proposition par la méthode de M. A. Denjoy. Soient Ox une demi-droite et Om_1 un arc simple possédant partout (sauf en m_1) une demi-tangente à droite parallèle à Ox. Donnons-nous un demi-cône de révolution C de sommet O et d'axe Ox. Cette demi-droite étant une demi-tangente à l'arc, celui-ci possède forcément des points dans C. Soit m' la borne vers m_1 des points de l'arc situés dans C. Si cette borne n'est pas l'extrémité de l'arc, celui-ci possède en m' une demi-tangente à droite parallèle à Ox, par suite il y a des points de l'arc $m'm_1$ dans C, ce qui conduit à une contradiction. Comme tout point de l'arc distinct

---

([1]) H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1^re^ édition, p. 72.

([2]) A. Denjoy, Mémoire cité, p. 175.

([3]) Georges Durand, *Sur la recherche d'une condition de planéité d'un arc simple à partir du contingent* (*C. R.*, t. 194, p. 944, 14 mars 1932).

de l'origine peut jouer le rôle d'extrémité, l'arc tout entier est dans C. Il suffit alors de prendre pour C des demi-cônes de plus en plus petits.

Indépendamment des recherches de M. Durand, je m'étais de mon côté préoccupé d'étendre le plus possible le Théorème de M. Lebesgue. Sachant par expérience (après mes études sur les continus d'ordre borné) que l'hypothèse : *courbe* pouvait parfois être remplacée par celle de *continu*, j'avais examiné la question pour des continus. C'est ainsi que j'ai été mis sur la voie du résultat qui fait l'objet de cette communication. Comme je l'ai déjà dit, ce résultat n'est pas nouveau. Il a été publié aux *Comptes rendus*, ainsi que quelques applications immédiates, dans une Note parue le même jour que celle de M. Durand [1]. Voici, extraits de la Note en question, deux de ces applications :

Un ensemble fermé possédant partout, sauf peut-être en un nombre fini de points, une demi-sécante, limite ou non, parallèle à une DEMI-DROITE *fixe, est situé sur un nombre fini de droites parallèles. Si l'ensemble est un continu, c'est un segment de droite.*

Un continu qui possède partout, sauf peut-être en un nombre fini de points, une demi-sécante limite ou non, parallèle à un plan fixe et FAISANT UN ANGLE AIGU AVEC UNE DEMI-DROITE FIXE DU PLAN, *est un continu plan.*

Dans ces énoncés l'expression : « possède une demi-sécante limite ou non » signifie : « possède une demi-tangente, ou bien une demi-sécante limite non demi-tangente, ou bien une demi-sécante ». On voit qu'ils sont beaucoup plus généraux que ceux de M. Durand. Pourtant ils s'établissent d'une manière extrêmement simple. La méthode de M. Denjoy ne pourra évidemment pas s'appliquer, car elle exige ce fil conducteur qu'est la courbe et qui fait défaut dans un continu quelconque (plus encore sur un ensemble fermé). Pour avoir prise sur l'ensemble considéré, il faut trouver autre chose. Comme on va le voir, cet « autre chose » c'est tout simplement la considération des points où l'hypothèse n'est pas vérifiée. Il existe toujours au moins un de ces points : un segment de droite ab, par exemple, ne peut avoir en b une demi-tangente parallèle à la demi-droite ab.

---

[1] A. MARCHAUD, *Sur les demi-sécantes limites et sur les semi-tangentes* (*C. R.*, t. 194, p. 948, 14 mars 1932).

3. Le résultat annoncé fait intervenir des demi-cônes convexes, qui se déduiront les uns des autres par des homothéties (directe ou inverse). Soit C *un demi-cône convexe de sommet* O, c'est-à-dire un ensemble fermé de demi-droites d'origine O, ne renfermant pas un demi-espace, tel que si deux points appartiennent à l'ensemble, le segment qui les joint en fait également partie. C *peut se réduire à un dièdre*, mais je supposerai qu'il n'est pas plan (ceci parce que nous nous plaçons dans l'espace à trois dimensions). Choisissons une demi-droite Ox, intérieure à C, et un plan P passant par O, laissant C d'un même côté (au sens large).

Ceci posé, considérons un *ensemble borné et fermé* E. Soit m un point quelconque de E, je désignerai par $C(m)$ et $C'(m)$ les deux demi-cônes de sommet m se déduisant de C par des homothéties respectivement directe et inverse. Je dis que $C(m)$ *contient toujours au moins un point* a *de* E *tel que* $C(a)$ *ne renferme à son intérieur aucun point de* E. Pour le montrer j'établirai d'abord que si un point m' appartient à $C(m)$, $C(m')$ est tout entier dans $C(m)$. En effet, soit S le symétrique de m par rapport à m'. Ce point est dans $C(m)$, d'autre part ce demi-cône est l'homothétique de $C(m')$ par rapport à S dans le rapport 2. Considérons un point p' de $C(m')$, le segment Sp homothétique de Sp' dans l'homothétie précédente appartient à $C(m)$, et par suite p', qui est compris entre S et p, puisque $C(m)$ est convexe. (Il est immédiat que le résultat qui vient d'être établi ne subsiste pas pour les demi-cônes non convexes.)

Désignons par A l'ensemble des points a tels que $C(a)$ ne contienne à son *intérieur* aucun point de E. Soit m un point quelconque de E, il s'agit de montrer que $C(m)$ contient un point (au moins) de A. C'est évident si m appartient à cet ensemble. Supposons le contraire, les abscisses des points de E intérieurs à $C(m)$ — c'est-à-dire celles de leurs projections sur Ox parallèlement à P — ont alors une borne supérieure atteinte pour un point au moins de E, puisque cet ensemble est fermé. Soit m' ce point, il est dans $C(m)$, donc $C(m')$ également. On en déduit que m' appartient à A, sans quoi il y aurait à l'intérieur de $C(m)$ des points de E d'abscisse supérieure à celle de m', ce qui est impossible.

En résumé, à tout point m de E correspond au moins un point a de A, contenu dans $C(m)$. Mais le demi-cône $C'(a)$ est symétrique de $C(m)$ par rapport au milieu de ma. Par suite m fait partie de $C'(a)$, autrement dit, E est contenu tout entier dans la somme des demi-cônes $C'(a)$, étendue à tous les points de A. Dans la conclusion précédente on peut évidemment remplacer A par un ensemble le contenant. Supposons alors que, en chaque point m de E, sauf sur un ensemble B, le demi-cône $C(m)$ contienne à son intérieur des points de E satisfaisant ou non à une condition supplémentaire arbitrairement choisie. L'ensemble B contient évidemment A. Nous sommes donc conduits au Théorème suivant, qui n'est autre que le résultat annoncé.

Soient E *un ensemble fermé et* C *un demi-cône convexe. Si* B *est l'ensemble des points b de* E *pour lesquels le demi-cône de sommet b directement homothétique à* C *ne renferme à son intérieur aucun point de* E, *satisfaisant ou non à une condition arbitrairement donnée, l'ensemble* E *est contenu tout entier dans la somme des demi-cônes inversement homothétiques à* C *ayant pour sommets les points de* B.

Comme condition supplémentaire on peut imposer aux points de E intérieurs à $C(m)$ d'être voisins de m. Autrement dit *on peut prendre pour* B *l'ensemble des points où* E *ne possède aucune demi-tangente intérieure au demi-cône* directement homothétique à C. C'est en vue de cette dernière application qu'il a fallu considérer les points *intérieurs* aux demi-cônes $C(m)$. L'ensemble E peut, en effet, avoir une demi-tangente sur la frontière de $C(m)$ sans posséder aucun point dans ce demi-cône en dehors de m.

On observera que nous n'avons pas utilisé entièrement l'hypothèse que E est fermé. Les conclusions précédentes sont donc valables pour des ensembles moins particuliers que les ensembles fermés. Ce sont ceux que j'ai appelés : *ensembles fermés d'un côté*. Pour cette extension je renverrai à mon Mémoire : *Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles*, où le Théorème est établi d'une manière un peu plus compliquée que celle que je viens d'exposer.

4. Même limitées aux ensembles fermés, les conséquences directes du Théorème précédent sont très nombreuses. Je me bornerai à celles annoncées tout à l'heure, et je dirai ensuite quelques mots sur des applications moins immédiates, dont l'intérêt n'est pas moindre.

Prenons pour C un demi-cône de révolution d'angle très petit et supposons que B ne contienne qu'un nombre fini de points. E est forcément contenu dans un nombre fini de demi-cônes de révolution inversement homothétiques à C. En prenant pour C des demi-cônes de même axe, dont l'angle au sommet tend vers zéro, on obtient l'une ou l'autre des propositions suivantes, selon la condition supplémentaire choisie.

Un ensemble fermé possédant partout, sauf peut-être en un nombre fini de points, une demi-tangente parallèle à une demi-droite fixe, est situé sur un nombre fini de droites parallèles. Si l'ensemble donné est un continu, c'est forcément un segment de droite.

Si à tout point m d'un ensemble fermé, sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux, on peut faire correspondre un point m' tel que la demi-droite mm' soit parallèle à une demi-droite fixe, l'ensemble est situé sur un nombre fini de droites parallèles; si c'est un continu ce ne peut être qu'un segment de droite.

Pour obtenir la condition de planéité, il suffira de prendre pour C un dièdre d'angle très petit, dont le bissecteur soit parallèle au plan donné. Là aussi on pourra considérer soit les demi-tangentes, soit les demi-sécantes. Je n'insiste pas.

Avant d'aller plus loin, je ferai quelques remarques au sujet de la question d'*orientation* à laquelle j'ai fait allusion au début de cet exposé. Par le fait que l'on déplace le demi-cône $C(m)$ par translation on ne peut conclure que si les demi-tangentes (ou les demi-sécantes) intervenant dans les énoncés sont dirigées dans le même sens par rapport à une direction fixe de plan. On peut se demander si ce n'est pas là une imperfection de la méthode, et si, par exemple, l'énoncé suivant ne serait pas exact. « Un continu possédant partout, sauf peut-être en un point une demi-tangente parallèle à une *droite* fixe est un segment de droite. » Il n'en est rien. Cet *énoncé est faux* même si l'on suppose que le continu est un arc simple se projetant sur la droite fixe d'une manière biunivoque. M. A. Denjoy a donné, en effet, un exemple de fonction continue *non constante* admettant partout un dérivé nul (d'un côté nécessairement variable) (1).

5. Les applications, moins immédiates que les précédentes, dont je vais parler maintenant, se rapportent à la théorie des équations différentielles et à celle des équations aux dérivées partielles. Elles découlent de la remarque suivante. Quand on déplace le demi-cône

(1) A. Denjoy, Mémoire cité, p. 209.

$C(m)$ par translation, en portant son sommet aux divers points d'une certaine région R de l'espace, on définit dans cette région un *champ* de demi-cônes, qu'il est naturel d'appeler uniforme. Si, au lieu de ne faire subir à $C(m)$ que des translations, on le déforme d'une manière continue, on obtiendra un champ (continu) pour lequel, dans toute portion suffisamment petite de R, les demi-cônes se déduisent presque par translation les uns des autres. Sans entrer dans le détail, je vais exposer rapidement quelques résultats, renvoyant pour le reste à mon Mémoire : *Sur les champs continus de demi-cônes convexes* (¹). Il faut pourtant préciser la notion un peu vague de variation continue d'un demi cône. Pour cela il suffit de définir un nombre qui généralise l'*angle* de deux demi-droites. Ce nombre c'est l'écart. Considérons d'abord deux demi-cônes : C et C′, de même sommet O. Formons les deux demi-cônes $(C)_\alpha$ et $(C')_\alpha$, obtenus en remplaçant respectivement dans C et C′ chaque demi-droite par un demi-cône de révolution de sommet O, ayant pour axe la demi-droite considérée et pour demi-angle au sommet un angle donné α. Si α est assez grand, (C_α) et $(C')_\alpha$ contiennent respectivement C′ et C. La borne inférieure des valeurs de α satisfaisant à cette double condition est l'*écart* des deux demi-cônes. L'écart de deux demi-cônes de sommets différents s'obtiendra en transportant par translation l'un d'eux de manière à amener son sommet sur celui de l'autre. L'écart de deux demi-droites est évidemment leur angle.

Rapportons l'espace à trois axes rectangulaires $Oxyz$, et considérons la région R définie par les inégalités $0 \leqq x \leqq y$. A chaque point m de R attachons un demi-cône convexe $C(m)$ de sommet m, possédant les propriétés suivantes :

1° Les demi-droites de $C(m)$ font avec Ox un angle au plus égal à un angle aigu indépendant de m;

2° $C(m)$ varie continûment avec m.

Le cas où $C(m)$ se réduit à une demi-droite unique, soit en certains points, soit partout, n'est pas exclu.

Je désignerai par $-C(m)$ le demi-cône opposé par le sommet à $C(m)$. Le champ constitué par les demi-cônes $-C(m)$ sera dit **le** ***champ opposé*** au premier.

(¹) A. Marchaud, *Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales* (*Compositio Math.*, Vol. 3, Fasc. I, 1936, p. 89 et p. 127).

Il est naturel d'appeler *intégrale* du champ $C(m)$ issue de a, tout arc simple ab, dont les demi-tangentes en chaque point m sont toutes dans $C(m)$ et $-C(m)$, ces demi-cônes contenant respectivement les demi-tangentes postérieures et antérieures (sauf bien entendu en a pour les demi-tangentes antérieures et en b pour les demi-tangentes postérieures). L'arc ab parcouru en sens inverse, est évidemment une intégrale du champ opposé, issue de b. Lorsque $C(m)$ se réduit partout à une demi-droite, les intégrales du champ sont celles d'un système d'équations différentielles,

$$y' = f(x, y, z), \qquad z' = g(x, y, z),$$

où les fonctions f et g sont bornées et continues dans R.

On démontre aisément que par tout point de R il passe au moins une intégrale du champ $C(m)$, prolongeable jusque dans le plan $x = 1$. L'ensemble des points de R par chacun desquels il passe au moins une intégrale issue d'un point donné a, est l'*émission* de ce point par le champ. L'émission d'un ensemble A est la somme des émissions de ses points. L'émission d'un ensemble par le champ opposé $-C(m)$ se définit d'une manière analogue.

6. Il est immédiat que si un point m' appartient à l'émission d'un point m par un champ, l'émission de m' (par le même champ) est tout entière dans celle de m, et d'autre part que m appartient à l'émission de m' par le champ opposé. On reconnaît là les propriétés des demi-cônes convexes obtenus à partir de l'un d'eux par des homothéties, propriétés qui nous ont conduit au théorème général; celui-ci peut donc s'étendre au cas présent. Pour lui donner exactement la même forme, je supposerai que $C(m)$ ne se réduit jamais à une demi-droite unique. On obtient alors la proposition suivante :

Soit E *un ensemble fermé* (de R). *Si* A *est l'ensemble des points* a *de* E *tels que l'émission de* a *par le champ* $C(m)$ *ne contienne à son intérieur aucun point de* E, *cet ensemble* E *est contenu tout entier dans l'émission de* A *par le champ opposé.*

Bien entendu on peut imposer aux points situés dans l'émission de chaque point une condition supplémentaire arbitraire, ce qui revient à remplacer A par un ensemble le contenant. On en déduit, par exemple, que *si* B *est l'ensemble des points* b *de* E *pour lesquels cet* *ensemble n'a aucune demi-tangente intérieure à* C(b), E *est tout entier dans l'émission de* B *par le champ* — C(m).

Considérons maintenant (dans R) un champ continu de demi-droites D(m), ou si l'on préfère un système d'équations différentielles

$$y'=f(x, y, z), \qquad z'=g(x, y, z).$$

Soit E un continu admettant partout, sauf en b, la demi-droite du champ pour une de ses demi-tangentes. Peut-on affirmer que E est une intégrale du champ — D(m) issue de b ? Ce serait alors dans le cas particulier d'un seul point exceptionnel, l'extension de la propriété établie tout à l'heure lorsque le champ D(m) était uniforme. Procédons de la même manière, considérons un champ C(m) obtenu en remplaçant chaque D(m) par un demi-cône de révolution d'angle au sommet ε, et faisons tendre ε vers zéro. Nous pouvons seulement affirmer que E est dans l'émission de b par le champ — C(m), quel que soit ε. Il est donc nécessaire de déterminer la limite de cette émission quand ε tend vers zéro. En fait cette limite est l'émission de b, ce qui montre que *tout continu possédant partout, sauf en b, la demi-droite du champ pour une de ses demi-tangentes est l'intégrale du champ opposé issue de b, pourvu que cette intégrale soit unique*. Cette dernière restriction ne peut évidemment être levée : plusieurs intégrales du champ D(m) peuvent se rejoindre en b, si l'intégrale de — D(m) issue de ce point n'est pas unique. On voit aussi pourquoi nous avons supposé qu'il y avait un seul point exceptionnel et non pas un nombre fini.

On peut rapprocher le théorème précédent du théorème suivant, établi par M. G. Bouligand dans le cas particulier où les fonctions f et g *ont des dérivées partielles continues*.

Étant donné le système différentiel

$$y'=f(x, y, z) \qquad z'=g(x, y, z),$$

tout arc de Jordan sans point multiple dont le contingent postérieur englobe, en chaque point, la demi-droite portant le vecteur (I, f, g) est un arc d'intégrale [1].

Si j'insiste sur les hypothèses faites par M. G. Bouligand, c'est parce

---

[1] Georges Bouligand, *Sur quelques points de la théorie des ensembles* (*Comptes rendus*, t. 194, p. 1060, 1932). Voir aussi *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p. 215.

que le rédacteur du *Zentralblatt,* qui a fait le compte rendu de la Note de M. G. Bouligand, s'est contenté de reproduire l'énoncé que je viens de citer, attribuant ainsi à l'auteur un résultat beaucoup plus général que celui qu'il avait démontré [1]. J'ajoute que ce résultat est d'ailleurs exact. C'est un cas particulier de la proposition suivante, établie dans mon Mémoire : *Sur les champs de demi-cônes :* si un arc simple ab admet en tout point intérieur m au moins une demi-tangente à droite dans le demi-cône $C(m)$, alors en chaque point $\overline{m}$, distinct de b, toutes les demi-tangentes à droite sont dans le demi-cône $C(\overline{m})$, et en tout point $\overline{m}$, distinct de a, toutes les demi-tangentes à gauche sont dans $-C(\overline{m})$ [2].

7. Voici pour terminer quelques propriétés des émissions et de leurs frontières. Soit A un ensemble *fermé* (de R) ; il n'est pas nécessaire de définir la frontière de l'émission de A par un champ $C(m)$, mais par le fait que nous ne considérons que les points contenus dans R, la section de l'émission par le plan $x=1$ fait partie de la frontière. Dans le cas général, la plupart des points de cette section cesseraient d'être sur la frontière si R et le champ étaient prolongés à droite de $x=1$. Si l'on exclut ces points, il reste ce que j'ai appelé la *frontière latérale* de l'émission.

Ceci posé, soient $C_\varepsilon(m)$ un champ *convergeant uniformément* vers le champ $C(m)$, et A_ε un ensemble fermé ayant pour limite A, simultanément quand ε tend vers zéro. *Si, quel que soit* ε *chaque demi-cône* $C_\varepsilon(m)$ *contient* $C(m)$ *et si de plus* A_ε *contient* A, *l'émission de* A_ε *par le champ* $C_\varepsilon(m)$ *et sa frontière latérale tendent respectivement vers celle de* A *et sa frontière latérale.* Les limites dont il s'agit sont des *limites métriques* au sens de M. Hausdorff. [Les restrictions : $C_\varepsilon(m)$ contient $C(m)$ et A_ε contient A, ne peuvent être supprimées sans compromettre l'exactitude des conclusions.] Ce dernier résultat, dont nous avons utilisé une partie il y a un instant, généralise un théorème de M. Paul Montel, complété par M^lle^ Marie Charpentier, sur la continuité des intégrales supérieure et inférieure de l'équation $y'=f(x, y)$ [3].

---

(1) *Zentralblatt,* 4 Band, 1932, p. 109.

(2) *Sur les champs continus de demi-cônes convexes,* p. 104.

(3) P. MONTEL, *Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle* (*Bull. Soc. Math.*, t. 50, 1926, p. 307); M^lle^ CHARPENTIER, *Thèse*, p. 13.

La propriété dont il va s'agir maintenant se rapporte à la théorie des équations aux dérivées partielles. Appelons *intégrale frontière* du champ $C(m)$, une intégrale dont les demi-tangentes en chaque point m sont *toutes* sur la frontière de $C(m)$ et celle de $-C(m)$. J'ai montré que tout point de la frontière latérale de l'émission d'un ensemble fermé A, est situé sur une intégrale frontière issue d'un point de la frontière de A. Si donc, on appelle : *frontière latérale extérieure* de l'émission de A, la fermeture de l'ensemble des points de la frontière latérale extérieure à A, on a le théorème suivant :

Soient $C(m)$ *un champ et* A *un ensemble fermé. La frontière latérale extérieure de l'émission de* A *par le champ est constituée par des intégrales frontières du champ issues des points frontières de* A. *De plus, en chaque point de la frontière latérale extérieure, celle-ci n'a aucune demi-tangente dans* $C(m)$ *ni dans* $-C(m)$.

L'intérêt de cette proposition est qu'elle constitue un premier pas dans l'étude géométrique de l'équation aux dérivées partielles dont le cône élémentaire est $C(m)$. Il est, en effet, immédiat que si *un morceau* Σ *d'une frontière latérale extérieure est une surface pourvue d'un plan tangent — et si* $C(m)$ *a lui-même partout un plan tangent —* Σ *est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles dont* $C(m)$ *est le cône élémentaire.* L'émission d'une courbe fournira les intégrales passant par cette courbe. Il reste à déterminer sous quelles conditions la frontière latérale extérieure sera une bonne surface. Cette question résolue, on aurait une théorie géométrique directe des équations aux dérivées partielles à cône élémentaire convexe, assujetti seulement à posséder partout un plan tangent et à varier continûment. Il est même probable que la *continuité* pourrait être remplacée par une condition moins restrictive analogue à celle que j'ai appelée la *régularité* dans le cas des champs de demi-droites, et pour laquelle je renvoie à mon Mémoire : *Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre* (1). On trouvera dans ce travail la définition de la *régularité* et sa propriété essentielle que voici : *si un champ* $D(m)$ *est régulier dans une sphère de centre a, il existe un arc simple traversant a, qui admet, en chacun de ses points* $\overline{m}$, $D(\overline{m})$ *pour demi-tangente*

(1) A. Marchaud, *Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre* (*Bull. Soc. Math.*, t. 62, 1934, p. 2-38).

(unique) *à droite continue à droite, et sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable deux demi-tangentes* (uniques) *opposées. Si le champ opposé à* D(m) *est lui aussi régulier dans la sphère, l'arc possède partout deux demi-tangentes opposées* (uniques) *continues*. J'ajoute qu'un champ régulier peut être discontinu sur un ensemble partout dense.

J'ai terminé. Mon but sera atteint si j'ai pu persuader quelques jeunes chercheurs qu'il y a en Géométrie différentielle directe un champ de recherches attrayantes et fécondes. Ces recherches n'exigent point l'acquisition préalable d'une technique difficile ou rébarbative. Elles demandent seulement du goût pour les choses simples et les réalités concrètes, goût qu'il n'est peut-être pas sans intérêt de développer, même en Mathématiques.

André Marchaud.

LES MATHÉMATIQUES A PARIS

AU MOYEN AGE

Par M. P. SERGESCU.

L'antiquité hellénique a établi les bases méthaphysiques de la Science (Pythagore, Platon, Aristote), les méthodes du raisonnement *déductif* en géométrie et astronomie (Euclide, Apollonius, Ptolémée), on a introduit des méthodes *inductives* et l'on pressentait le concept d'infiniment petit en géométrie et mécanique (Eudoxe, Archimède). Mais les mathématiciens grecs dédaignaient l'arithmétique proprement dite, la mathématique calculante. Ces différents chapitres ne se sont pas développés au même endroit, ni dans des époques contemporaines, ce qui a eu des conséquences sur le développement ultérieur des mathématiques, par le truchement des Romains et des Arabes.

Deux grandes écoles partageaient les savants grecs dans leurs attitudes devant les principes des sciences; les deux écoles ont eu leur apogée en Attique au IVe siècle avant J.-C., Platon (429-347 avant J.-C.) demande à l'astronomie de « sauver les apparences »; la Science selon Platon ne pouvait prétendre à expliquer la nature même des choses. Mais Aristote (384-322 avant J.-C.) voulait que la science cosmologique soit établie sur des principes aprioriques, dont les conséquences soient des lois inébranlables et nécessaires de l'univers. Par ailleurs, Platon et Aristote tenaient compte de la métaphysique de la pensée scientifique hellénique : ils croyaient à une hiérarchie des formes géométriques et des mouvements. D'après eux, les astres, corps parfaits, ne pouvaient emprunter que des trajectoires parfaites, donc circulaires, en effectuant des mouvements parfaits, donc uniformes. Ce préjugé métaphysique a pesé sur l'astronomie durant des siècles, à travers le moyen âge, à travers N. Copernic (1473-1543), jusqu'à Kepler (1571-1630). C'est ce préjugé qui a engendré les deux explications célèbres du système du monde : d'une part les sphères homocentriques d'Eudoxe de Cnide (409-356 avant J.-C.) et d'Aristote, d'autre part les épicycles et les déférents d'Hipparque (IIe siècle avant J.-C.) et de Claude Ptolémée (IIe siècle après J.-C.). Aristote établit une différence essentielle entre les astres, incorruptibles, mus par leur propre âme, et les corps sublunaires, corruptibles, soumis aux lois de la mécanique terrestre. Chaque grandeur devant être représentable matériellement par des longueurs, il s'ensuivait que l'infiniment grand n'existait pas pour Aristote. En revanche, le Stagyrite admettait la divisibilité à l'infini, d'où il tirait des arguments contre les atomes de Démocrite et de Léucippe.

La géométrie et l'astronomie se sont codifiées surtout à Alexandrie, grâce à Euclide (environ 323-283 avant J.-C.), Apollonius (environ 200 avant J.-C.), Hipparque, Ptolémée.

Archimède (287-212 avant J.-C.) vécut en Grande Grèce, c'est-à-dire en Italie, à Syracuse. Nous lui devons : la considération de méthodes infinitésimales dans le problème de la quadrature; l'expression de la longueur de la circonférence et de l'aire de la sphère, les principes de l'hydrostatique. Il représente le point de vue expérimental, inductif, tout à fait distinct des méthodes déductives d'Aristote.

Les travaux de Diophante d'Alexandrie (IVe siècle après J.-C.) sur la théorie des nombres et l'algèbre ont été oubliés durant tout le moyen âge et nous n'aurons pas à nous en occuper ici.

Les Romains, et après eux les Arabes, se sont trouvés devant trois attitudes différentes de la mathématique grecque : 1° les principes et les systèmes du monde des écoles d'Attique; 2° les méthodes déductives de l'école d'Alexandrie; 3° les faits et les résultats de l'école de Syracuse. Une synthèse de ces points de vue, méthodes et faits, le rejet des préjugés métaphysiques, auraient pu apporter des progrès immédiats de la science mathématique. Les circonstances décidèrent autrement.

L'esprit romain n'était pas favorable à la mathématique spéculative et abstraite. Hommes d'actions et de lois, grands réalisateurs et organisateurs, les Romains se sont tournés surtout vers les *applications* des mathématiques, dans l'architecture, la géodésie, etc. Ils ont dédaigné les raisonnements mathémathiques, pour se servir uniquement des énoncés. Les auteurs latins se sont contentés d'écrire des géométries, d'après Euclide, en conservant seulement les faits, etc. Un auteur caractéristique de cet emploi excessif des énoncés seuls est Boèce (470-524) dont les traités d'arithmétique, géométrie et musique ont formé la pâture mathématique des savants de l'occident latin, durant des siècles. La renommée de Boèce était si grande que, lorsque les sculpteurs de la cathédrale de Chartres figurèrent les sept arts libéraux, ils mirent Boèce comme représentant de l'arithmétique, à côté d'Euclide représentant de la géométrie. Les travaux originaux des Romains ont trait aux mathématiques appliquées, en partant surtout des métriques de Héron, en pratiquant l'abaque, en faisant avancer la trigonométrie. Comme à cette époque il n'y avait pas des livres imprimés, mais seulement des manuscrits peu nombreux, la civilisation latine a vite fait de jeter dans l'oubli les textes grecs et, avec eux, toutes les acquisitions splendides de la mathématique hellénique.

C'est sur ces bases que devait bâtir sa science le moyen âge latin. Sa première tâche fut de rassembler les matériaux épars de la science antique, de les intégrer dans un système unitaire, de mettre d'accord l'expérience contemporaine et les exigences de la théologie chrétienne avec les principes anciens; enfin, il fallait créer des notions fondamentales qui manquaient (par exemple l'infini) et sans lesquelles tout progrès était impossible.

Le moyen âge latin rassembla d'abord les connaissances scientifiques transmises par des auteurs ou traducteurs latins, comme Macrobe, Simplicius, Boèce, etc. On aboutit ainsi au mouvement encyclopédiste des VIII^e^-XII^e^ siècles. Isidore de Séville (570-636) rédigea les *Origines ou Étymologies*, une des plus anciennes encyclopédies scientifiques. Citons encore les encyclopédies : d'Albert le Grand (1193-1280), évêque de Cologne et de Ratisbonne et professeur à l'Université de Paris; Vincent de Beauvais (XIII^e^ siècle), *Speculum majus tripartitum, naturale, doctrinale, historiale;* Roger Bacon (1214-1294), *Opus majus.* La civilisation de Constantinople garda jusqu'à la chute de l'empire byzantin une certaine tradition de la science grecque; mais les manuscrits byzantins ne passèrent pas dans les couvents d'Occident, où se forgeait la nouvelle science.

A leur tour, les Arabes intervinrent dans le développement de la science du moyen âge. Les Arabes prirent connaissance assez tôt de la science grecque éparpillée à Constantinople, Alexandrie, Asie Mineure et Grèce. Ils en furent éblouis et entreprirent toute une série de traductions en arabe des textes grecs. Sous les Abassides, aux VIIIe et IXe siècles, Bagdad devint un foyer mathématique important. On y traduisit Aristote, Euclide, Ptolémée.... L'esprit arabe fut conquis par le système péripatéticien. Mais les Arabes entourèrent de moins de vénération l'œuvre d'Archimède. Ce détail a son importance car, grâce aux Arabes qui ont traversé le nord de l'Afrique et se sont installés en Espagne, l'Occident latin découvre au XIIe siècle, l'œuvre d'Aristote, Euclide et Ptolémée, mais est moins bien renseigné sur Archimède. Il s'ensuit une tendance plus spéculative, plus abstraite, de la science à la Sorbonne, tandis qu'en Italie et à Montpellier, la Science sera plus intuitive, sous l'influence directe de la tradition archimédienne.

Les mathématiques arabes offrent une synthèse : d'un côté l'arithmétique et la trigonométrie hindoues, enrichies par l'algèbre; d'un autre côté l'héritage grec d'Aristote, Euclide, Ptolémée, auquel on a adjoint des commentaires très nombreux et profonds.

La partie calculante des mathématiques arabes eut son siège surtout dans l'école arabe orientale; les exposés et commentaires sur Aristote formèrent la prédilection des savants arabes occidentaux, établis en Espagne. Parmi eux, il faut citer le « commentateur » Averroes, de Cordoue (1120-1198). Les auteurs arabes initièrent les latins occidentaux à une grande partie de l'héritage scientifique grec. L'initiation fut aidée par les croisades, qui mirent en contact direct le monde latin avec l'Orient. Au XIIe siècle, les archevêques de Tolède constituèrent un collège pour la traduction en latin des œuvres arabes, que les juifs d'Espagne avaient mis en hébreu. Cette découverte de la science antique coïncide chronologiquement avec la création de l'Université de Paris.

Le moyen âge latin avait déjà organisé des écoles, auprès des couvents et évêchés. Alcuin (735-804) fonda l'école de Tours, célèbre au IXe siècle, dont la tradition scientifique fut continuée au Xe siècle par l'école de Reims. Un des maîtres les plus connus de Reims fut Gerbert († 1003), le futur pape Sylvestre II. Les traités de Gerbert, ou bien ceux qui lui sont attribués, sur l'abaque, l'astrolabe, la géométrie, furent enseignés durant des siècles. Gerbert apporta des perfectionnements à l'emploi de l'abaque, en remplaçant le nombre des pierres qu'on mettait dans chaque colonne par des pierres marquées différemment; il préparait ainsi l'introduction des chiffres. Le XIe siècle vit surgir la gloire de l'école de Chartres. Une correspondance entre deux élèves de Chartres, Ragimbold de Cologne et Radolf de Liége, publiée par Paul Tannery, nous renseigne sur l'état des études mathématiques vers 1025 et sur les conséquences désastreuses de l'oubli où l'on avait plongé les démonstrations géométriques de l'antiquité. Les deux écolâtres discutent sur la définition de l'angle extérieur à un triangle, sans arriver à se mettre d'accord; mêmes tâtonnements chez un autre maître contemporain Francon de Liége, qui ne peut pas construire une moyenne proportionnelle. Au XII^e siècle commencent à briller les écoles de Paris, autour de Sainte-Geneviève et de Notre-Dame. Différents savants, anciens élèves de Chartres, s'adonnent à la traduction des premiers textes mathématiques arabes. Adelhard de Bath traduit les *Éléments d'Euclide;* Gérard de Cremonne donne, en 1175, la traduction de l'*Almageste* de Ptolémée; Robert de Rétines.... C'est la préparation de la magnifique floraison que devait donner l'Université de Paris au XIII^e et surtout au XIV^e siècle.

Le contact de la science arabe avec la science occidentale au XIII^e siècle présente des caractères différents suivant qu'il eut lieu en Italie et dans les universités sous l'influence italienne ou à Paris et dans les université issues de la Sorbonne. En Italie, Léonard de Pise (Fibonacci) appartenait plutôt au monde commercial tourné surtout vers les *faits* mathématiques. De ses rencontres avec les Arabes, de ses voyages en Égypte, Syrie, Sicile et Provence, Léonard rapporta une connaissance étendue de la mathématique calculante, qu'il fit connaître aux latins par son *Liber Abaci.* Il y emploie le système de position pour l'écriture, le zéro, il s'occupe de progressions arithmétiques et géométriques, de suites dont les différences secondes sont constantes; il effectue des extractions de racines carrées et cubiques. Il sent le besoin des *démonstrations,* qu'il emploie dans le *Liber Abaci,* aussi bien que dans son autre ouvrage *Practica geometriae.* En outre, il était célèbre par la solution de certains problèmes d'analyse diophantine et surtout par le calcul avec une approximation de deux unités du sixième ordre sexagésimal (neuf décimales exactes) de la racine positive de l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Le souvenir d'Archimède, la tradition de Fibonacci, ainsi que leur esprit purement latin, poussaient les savants d'Italie surtout vers l'étude des *faits scientifiques*, au détriment des méthodes déductives. Les écoles de Salerne ou de Bologne sont des exemples de cette tendance. En mathématiques, cela conduisit à des algébristes et des mécaniciens, comme Luca Pacioli (+1510), J. Cardan (1501-1576), N. Tartagali (1500-1557), Léonard de Vinci (1452-1519), pour aboutir, avec Galilée

(1564-1642) à la science moderne. Les disciples d'Allemagne des maîtres italiens, A. Riese (1489-1559), Widman von Eger (né vers 1460), J. Müller-Regiomontanus (1436-1476), ont codifié l'algèbre et ses notations, la trigonométrie.

Le développement des mathématiques fut tout autre dans l'Université de Paris. Ayant pris connaissance surtout des œuvres d'Aristote, Euclide et Ptolémée, et des commentaires des Arabes, les Parisiens n'avaient pas une connaissance ample des *faits* mathématiques. Ils se sont tournés vers les *méthodes* du raisonnement, qu'ils ont perfectionnées d'une manière vraiment remarquable. Débarrassée des difficultés qu'aurait pu amener le chaos des faits, la pensée scientifique parisienne s'est ingéniée à créer les moules abstraits du raisonnement. Chose extraordinaire, l'effort seul de la pensée a réussi à découvrir quelques faits scientifiques de première importance, comme la notion de limite. En définitive, le moyen âge mathématique représente la recherche mutelle de deux tronçons de cette science, les faits et les méthodes déductives, tronçons séparés par les circonstances historiques. Cette séparation a eu pour résultat un grand progrès du raisonnement abstrait et a préparé les moules dans lesquels la Science moderne a pu couler les faits redécouverts vers le XVIe siècle. C'est cette préparation des moules du raisonnement, par le travail patient du moyen âge, qui a permis la floraison rapide et magnifique des mathémathiques aux XVIe et XVIIe siècles. Qui sait si la connaissance parallèle des faits et méthodes de l'antiquité n'eût retardé l'affinement du raisonnement, se demande très judicieusement M. J. Pérès, dans son *Histoire des Sciences exactes*.

L'œuvre mathémathique du moyen âge parisien aux XIIIe et XIVe siècles a été ignorée en grande partie jusqu'à la fin du siècle dernier. C'est surtout Pierre Duhem qui a déchiré le voile de notre ignorance, en nous présentant des savants de premier plan, qui ont enseigné ou étudié à Paris, et dont pourrait s'énorgueillir n'importe quelle époque.

Les savants moyenâgeux se trouvaient sous l'influence du prestige du Stagyrite, prestige accru par les commentaires élogieux des Arabes. On n'osait pas attaquer les principes du système péripatéticien, unanimement admis, même si l'expérience nouvelle faisait voir des trous dans le système. Ce n'est qu'en 1277 qu'on porte un coup important au prestige d'Aristote. Pour des raisons théologiques, l'évêque de Paris Étienne Tempier fit condamner 300 propositions péripatéticiennes; c'était à la fois une atteinte à la foi en l'infaillibilité d'Aristote et un encouragement pour attaquer le système scientifique du Stagyrite. P. Duhem voit là « la brèche par laquelle notre mécanique et notre physique ont passé ».

Un des problèmes qui a intéressé au plus haut degré la science des XIIIe et XIVe siècles fut la question de l'infini : infiniment grand, infiniment petit, limites. Aristote n'admettait pas l'existence de l'infiniment grand; la Scolastique chrétienne croyait dans la toute puissance de Dieu, donc dans sa puissance de créer l'infini. La contradiction entre la théologie et Aristote était flagrante. Saint Thomas d'Aquin (1227-1274) explique que l'impossibilité de l'existence de l'infini, dont parle Aristote, se rapporte à l'univers créé, mais pas au créateur. Un disciple de saint Thomas, Gilles Colonna ou Gilles de Rome (1247-1316), suppose que la grandeur peut être considérée de trois manières différentes : 1° en tant que grandeur, en faisant abstraction de la matière dans laquelle elle est réalisée; 2° réalisée dans une matière sans spécifier cette matière; 3° réalisée dans une matière déterminée. Les deux premiers aspects de la grandeur permettent la divisibilité à l'infini, mais pour les grandeurs réalisées dans une matière déterminée, il y a des minima naturels au-dessous desquels on ne peut pas pousser la divisibilité sans entraîner la corruption de la matière. L'existence de ces minima « naturels », expliquée dans les *Quod libeta* de Gilles, concilie l'atomisme avec les théories péripatéticiennes. Un pas en avant dans l'étude de l'infini est fait par le portugais Petrus Julianus Hispanus (1226-1277), le futur pape Jean XXI. D'après lui, il y a deux manières d'envisager l'infini : catégorique et syncatégorique. Dans les propositions catégoriques, les termes sont considérés comme actuellement réalisés ou comme susceptibles d'être entièrement réalisés en acte : *in facto esse*. Dans les propositions syncatégoriques, les termes peuvent se réduire à l'acte toujours d'une manière incomplète, toujours avec un mélange de puissance : *in fieri*. Dès lors, une distinction devient nécessaire : ce qui est vrai au sens catégorique peut ne plus l'être au sens syncatégorique, et inversement. Ces considérations ont été développées par Walter Burley, Guillaume d'Ockam, Jean de Jandun, etc., pour arriver, au milieu du XIVe siècle, à Paris, à l'apogée des études sur l'infini. A cette époque, il y avait à Paris des professeurs célèbres : Albert de Saxe, professeur de 1350 à 1361; Thémon le fils du Juif, qu'on rencontre en 1349 comme licencié, et ensuite jusqu'en 1361 comme procureur et receveur à l'Université; Jean Buridan (1300-1360), recteur en 1327. Ils représentent un courant qu'on peut appeler finitiste, en admettant l'infini syncatégorique, mais en niant la possibilité de l'infini actuellement réalisé. D'autres savants de la même époque admettent l'existence de l'infini actuel, catégorique, genre de transfini d'aujourd'hui. Citons, parmi ces infinitistes, Grégoire de Rimini, qui, après avoir enseigné à Paris, mourut à Vienne en 1358 comme général des Augustins; Robert Holkot († 1349), etc.

Albert de Saxe formule très clairement la différence entre les deux conceptions de l'infini. Voici un passage d'Albert, cité par Pierre Duhem (*Études sur Léonard de Vinci*, 2e série, p. 23).

« Si l'on formule deux propositions semblables, mais que l'infini soit tenu pour catégorique dans l'une et pour syncatégorique dans l'autre, ces deux propositions sont radicalement hétérogènes entre elles; elles ne résultent pas l'une de l'autre; elles ne répugnent pas, non plus l'une à l'autre. La vérité de chacune d'elles doit être prouvée en soi et sans souci de la vérité de l'autre. C'est ainsi que cette proposition : le continu est infiniment divisible, n'entraîne pas cette autre : le continu peut être divisé en une infinité de parties; car en la première il s'agit d'un infini syncatégorique et, en la seconde, d'un infini catégorique. »

Albert réussit, par l'effort seul de la pensée, de créer la notion de limite, atteinte ou non atteinte. Les faits mathématiques qu'il utilise pour cette création sont extrêmement réduits, à peine connaît-il la progression géométrique de raison subunitaire, pour tout exemple de suite infinie. Voici le raisonnement : Albert considère une série de puissances actives et une série de résistances passives. Étant donnée une puissance active, il n'existe pas une résistance *maximum* parmi les résistances qu'elle peut surmonter, mais il existe une résistance *minimum* parmi les résistances qu'elle ne peut pas surmonter. Pierre Duhem cite à ce point de vue des passages très importants (*Ibid.*, p. 27).

« Soit, en effet, A la puissance active; on peut se donner une résistance qui lui soit égale et la désigner par B. Or, cette résistance est la résistance minimum parmi celles que la puissance A ne peut surmonter. La puissance A, en effet, ne peut surmonter la résistance B, car elle ne l'excède point. Mais si nous nous donnons une résistance quelconque inférieure à B, nous pouvons trouver une résistance supérieure à celle-là que la puissance A peut surmonter; soit, en effet, une résistance inférieure à B; on peut trouver une résistance supérieure à celle-là et inférieure à B ; et comme le moindre excès suffit à déterminer le mouvement, une résistance inférieure à B étant donnée, on peut trouver une résistance supérieure à celle-là que la puissance active A surmonte. Dès lors, d'après la définition du *minimum in quod non* donnée ci-dessus, B est la résistance minimum parmi celles que A ne peut surmonter. »

Ceci revient à reconnaître que parmi les résistances que la puissance A peut surmonter il y a un minimum, limite atteinte, tandis que parmi les résistances que la puissance A peut surmonter, il n'y a pas de limite atteinte (Albert divise en deux la différence entre B et la résistance inférieure donnée, ensuite le nouvel intervalle, et ainsi de suite). Il y a toujours une résistance plus grande de la même classe, quelle que soit la résistance donnée, que la puissance A peut surmonter.

Albert emploie ces notions pour conclure à l'existence de l'infiniment grand syncatégorique et à la négation de l'infiniment grand catégorique. Voici, par exemple, son raisonnement pour montrer la possibilité de tracer une courbe de longueur infinie syncatégorique, mais non pas catégorique, sur un cylindre fini. Le raisonnement est résumé par P. Duhem (*Ibid.*, p. 44-45).

« On prendrait un cylindre fini dont on diviserait la hauteur en parties proportionnelles. [« Diviser en parties proportionnelles », selon Albert de Saxe, veut dire diviser l'entier en parties qui décroissent suivant les lois de la progression géométrique de raison 1/2.] A la surface de ce cylindre on tracerait une spire d'hélice ayant pour pas la première partie proportionnelle de la hauteur; on la ferait suivre d'une seconde spire d'hélice ayant pour pas la seconde partie proportionnelle de la hauteur, et ainsi de suite. On formerait de la sorte une espèce de spirale de longueur infinie. Albert de Saxe accorde bien que cette courbe, si elle était tracée, serait de longueur infinie; mais cette courbe ne peut pas être tracée en entier; il faudrait, en effet, pour qu'elle fût terminée, que ses spires embrassent toutes les parties proportionnelles du cylindre; or, « il n'existe pas de parties dont on puisse dire qu'elles sont *toutes* les parties proportionnelles du cylindre *nullæ partes sunt omnes partes proportionnales columnæ* ». Par cette argumentation, l'impossibilité de l'infiniment grand en acte se trouve rattachée à l'impossibilité de réaliser la division à l'infini du continu; entre la théorie de l'infiniment grand et la théorie de l'infiniment petit, elle établissait une correspondance très exacte qu'Aristote et Averroès n'avaient pas entièrement reconnue. »

Grégoire de Rimini, au contraire, accepte l'existence de l'infini catégorique, en acte. Il admet, en plus, la divisibilité à l'infini au sens actuel, catégorique, de toute grandeur continue. A l'argument d'Albert de Saxe qu'il n'y a pas de *dernière* spire de l'hélice, il répond que ceci est vrai au sens syncatégorique; mais, si l'on considère la courbe dans sa totalité, sans indiquer l'ordre des spires, il y a bien une longueur infinie actuelle.

Cette floraison des études sur l'infini commence à s'éteindre vers la fin du XIV^{e} siècle. Déjà Marsile d'Inghem, ancien élève de Paris, recteur de Heidelberg († 1393), ne fait plus les distinctions subtiles en ce qui concerne les limites atteintes ou non atteintes. Au XV^{e} siècle, dans son *Propositum de infinito,* Jean Majoris (bachelier de Paris en 1450, régent du Collège Montaigu de Paris dans la seconde moitié du XV^{e} siècle) nous montre les discussions peu profondes qui ont suivi les recherches d'Albert de Saxe, de Jean Buridan, ou de Grégoire de Rimini. Les disciples de ces maîtres éminents n'étaient plus à la hauteur de l'enseignement reçu. Dans un *Trilogus inter duos logicos et magistrum* (contenu dans le Propositum) deux élèves se plaignent à leur maître de l'aridité des sujets des cours : trop d'études sur l'infini, de discussions sur la composition du continu, etc. Un des élèves dont parle Majoris, Jean Dullaert de Gand (1471-1513) succéda à Majoris à la régence du collège Montaigu.

Les idées de l'École parisienne passèrent dans les autres universités du continent, grâce à des anciens élèves comme Marsile d'Inghem, etc. Certaines universités du nord de l'Italie commencèrent à s'en emparer au XV^{e} siècle. C'est ainsi que la *Summa totius philosophiae* de Paul de Venise (= Paul Nicoletti d'Udine, † 1429) régna à Padoue durant plus d'un siècle, en exposant l'enseignement de l'Université parisienne, et surtout celui d'Albert de Saxe.

On ne saurait mieux caractériser les efforts de la brillante École parisienne du XIV^{e} siècle en vue de la création de la notion d'infini, que par les passages suivants, dus à Pierre Duhem (*Études sur Léonard de Vinci,* 2^{e} série, p. 34-35 et 407).

« Ainsi, de siècle en siècle, les maîtres de l'École poursuivent l'analyse logique du concept de limite; ils préparent la voie aux mathématiciens qui devaient si prodigieusement enrichir ce concept.

Toutefois, les disciples des logiciens qui ont illustré l'École de Paris au XIV^{e} siècle ne gardent pas toujours la vigueur de dialectique de leurs maîtres; en leurs écrits, plus d'une distinction nécessaire s'efface, plus d'une conclusion perd de sa netteté. A Padoue, Gaëtan de Tiène enseigne, à la fin du XV^{e} siècle, qu'une puissance est terminée à la fois par un *maximum in quod sic* et par un *minimum in quod non;* selon que l'on considère le premier terme ou le second, on la nomme puissance ou impuissance, cette conclusion peu logique n'était même pas originale; en ce cas, comme en bien d'autres, les *Abbreviationes* de Marsile d'Inghem avaient inspiré Gaëtan de Tiène. D'ailleurs, à la fin du XV^{e} siècle, et plus encore au début du XVI^{e} siècle..., le bel esprit de l'humanisme faisait tort au sens de la logique; les subtiles distinctions sans lesquelles il n'est point de véritable rigueur, le style technique sans lequel la confusion rend la discussion impossible, semblaient insupportables à des lettrés qui faisaient profession de priser le beau langage par dessus toutes choses; un Louis Vivès (1492-1540) composait sa diatribe *In pseudodialecticos* où il déclarait que les leçons données par Jean Dullaert au Collège de Montaigu l'avaient dégoûté de la scolastique, et où il condamnait l'emploi du *style de Paris*, c'est-à-dire du langage technique. »

....

« Il est clair qu'après Albert de Saxe nous assistons à la décadence des études logiques que l'École consacrait au problème de l'infini. Parmi les causes de cette décadence il en est une, croyons-nous, qui se laisse aisément saisir. Les maîtres du XIV^{e} siècle, auxquels nous devons de si profondes remarques au sujet de l'infini syncatégorique et de l'infini catégorique, étaient fort peu géomètres. Sous les discussions formelles qu'ils développaient avec une si rigoureuse subtilité, nous percevons un seul fait mathématique, et ce fait est un des plus élémentaires. Ces auteurs savent former la somme des termes d'une progression géométrique de raison fractionnaire. Ce seul théorème d'arithmétique fournit tous les exemples en lesquels leurs raisonnements viennent se particulariser. On ne saurait trop admirer la puissance intellectuelle d'hommes qui, munis d'un si faible bagage mathématique, ont su formuler avec tant de netteté et examiner avec tant de pénétration les plus essentiels des problèmes logiques que pose l'Analyse infinitésimale. »

« Mais le feu le plus vif s'éteint faute d'aliments. La Dialectique infinitésimale ne pouvait progresser sans cesse, alors qu'elle n'avait, pour éprouver la justesse de ses conclusions, que les propriétés de la progression géométrique. Dépourvus d'exemples particuliers et précis où leur raison pût reprendre vigueur en touchant terre, les logiciens devaient voir s'alanguir par degrés la force de leur esprit; de leurs discussions, qui semblaient sans objet, les étudiants devaient se détourner peu à peu avec un dégoût croissant. La théorie de l'infini était condamnée à la décrépitude où nous la voyons au temps de Johanes Majoris. A ce moment, la Dialectique infinitésimale des Parisiens semble une machine usée, qui, avec des heurts et des grincements, tourne à vide. »

« Mais, à ce même moment, de grandes transformations s'opèrent dans le monde intellectuel. La Science des Parisiens conquiert les Italiens qui, jusque-là, lui étaient presque tous demeurés rebelles; en même temps, elle sort des Universités pour se répandre parmi les chercheurs indépendants. Léonard de Vinci est un des premiers Italiens et, aussi, un des premiers penseurs étrangers aux Facultés dont la Logique des Jean Buridan, des Grégoire de Rimini, des Albert de Saxe ravisse l'attention; mais bien d'autres le suivront. Or, ces savants italiens reçoivent, en même temps, une aide précieuse qui avait presque entièrement fait défaut à leurs précurseurs de la Sorbonne ou de la rue du Fouarre; la Science antique leur est révélée; Archimède leur enseigne comment on peut résoudre des problèmes difficiles et variés où l'idée d'infini se trouve impliquée. L'union, en l'esprit des géomètres italiens, de la Logique parisienne et de la Mathématique grecque va donner naissance à l'Analyse infinitésimale des modernes. »

Outre le problème de l'infini, d'autres questions mathématiques ont également passionné le moyen âge. Il y avait plusieurs points sur lesquels il fallait corriger les dires d'Aristote. Les savants les plus remarquables à ce point de vue furent Jordanus Nemorarius au XIII^e siècle, Albert de Saxe, Jean Buridan et Nicole Oresme au XIV^e siècle. On leur doit de grands progrès dans les principes de la mécanique et de la cosmologie. Malheureusement, ils furent oubliés au XV^e siéle.

Jordanus Nemorarius n'est pas complètement identifié; on croit que c'est Jourdan de Saxe, général des dominicains après saint Dominique. Il enseignait à Paris vers 1220. En algèbre et en géométrie, on lui doit les traités *Arismetica*, *De numeris datis*, *De triangulis*. Un autre traité, *De ponderibus*, apporte des idées neuves en mécanique; Duhem voit en elles lé premier emploi du principe des travaux virtuels. Jordanus donne une théorie moderne du levier, en s'appuyant sur le principe : « Il faut même puissance pour élever des poids différents, lorsque ces poids sont en raison inverse des hauteurs qu'ils franchissent. » En algèbre, Jordanus emploie systématiquement des lettres pour représenter les inconnues. Malgré le manque du signe =, ou des signes pour les opérations, son écriture constitue un progrès dans l'établissement du symbolisme algébrique. Jordanus est un des premiers savants qui considèrent en géométrie le mouvement des figures. Les œuvres de Jordanus furent célèbres au moyen âge. Dès l'apparition de l'imprimerie, Lefèvre d'Étaples les édita à deux reprises, en 1496 et en 1514. Un manuscrit anonyme d'un disciple de Jordanus traite du plan incliné.

Nous rencontrons de nouveau Albert de Saxe à propos de l'étude des centres de gravité. Dans son *De Cælo*, il étudie la figure de la Terre, qu'il admet ronde, ce qui lui permet d'énoncer des propositions susceptibles de frapper l'imagination de ses élèves, comme par exemple : « Si l'on construisait deux tours verticales, plus elles s'élèveraient, plus elles s'écarteraient l'une de l'autre. » Lorsqu'un homme se promène, à la surface de la Terre, sa tête se meut plus vite que ses pieds (*Cf.* P. Humbert : *Les maîtres d'une génération : P. Duhem.*) D'autre part, Albert de Saxe, en désaccord avec Aristote, envisage certains petits mouvements de la Terre.

Jean Buridan doit être compté parmi les précurseurs de la mécanique actuelle. Il reprend l'ancienne doctrine de Philopon, qui ne voulait pas admettre avec Aristote que tout mouvement était dû à l'action directe et continuelle d'une puissance motrice appliquée au mobile. Buridan affirme que c'est le mobile qui acquiert une propriété grâce à laquelle il se meut, sans être poussé par un agent extérieur. Cette propriété du mobile, appelée *impetus,* doit être proportionnelle à la quantité de matière première (masse) du mobile, et croître avec la vitesse. L'impetus devait devenir, plusieurs siècles plus tard, notre force vive. Buridan énonce encore une idée neuve en contradiction avec le Stagyrite, et qui est extraordinaire pour son époque. Aristote établissait une distinction essentielle entre les corps terrestres (sublunaires) et les astres. Buridan supprime cette distinction. Il applique aux astres la théorie de l'impetus, en écartant les âmes qui mouvaient les corps célestes dans le système péripatéticien. C'est un premier essai d'unification des lois de l'Univers, précurseur de l'analogie établie plusieurs siècles plus tard par Newton entre la chute d'une pierre et le mouvement de la Lune. Vu le prestige dont jouissait Aristote au XIV^{e} siècle, l'affirmation de Buridan, qui unifiait les causes des mouvements célestes et des mouvements sublunaires, constitue un très grand mérite pour son auteur.

Le tableau des mathématiques parisiennes au XIV^{e} siècle doit être complété par le nom d'un des plus grands parmi ces maîtres : Nicole Oresme (environ 1323-1382), évêque de Lisieux, véritable précurseur à plus d'un point de vue. C'est le premier savant connu qui a écrit en français, et non pas en latin, un *Traité de la sphère,* d'où nous héritons les expressions actuelles de la géographie et de l'astronomie. Il traduisit en français plusieurs ouvrages d'Aristote. Dans son *Tractatus de latitudinibus formarum*, Oresme se révèle précurseur de la géométrie analytique et de Descartes; il détermine les points par leurs deux coordonnées : longitude (abscisse) et latitude (ordonnée). De plus, Oresme étudie la latitude (= fonction) des points d'une demi-circonférence. Il remarque que la latitude varie le moins au point où elle est la plus grande, ce qui revient à dire — avant la découverte de la notion de dérivée — que la dérivée est plus petite en valeur absolue au voisinage des extrema. Dans l'*Algorismus proportionum*, Oresme emploie systématiquement les exposants fractionnaires auxquels il étend les règles du calcul des exposants entiers. Et voici encore une idée fondamentale, pour laquelle Oresme peut être regardé comme précurseur. Avant Copernic, il admet l'hypothèse de la mobilité de la Terre comme base de l'explication du système du Monde. L'apparition de Nicole Oresme représente un apogée de la Science mathématique au XIV^{e} siècle.

Outre les travaux de mathémathique théorique, le XIV^{e} siècle français vit aussi quelques œuvres importantes de mathématique calculante, de tables, etc. Déjà au XIII^{e} siècle, Guillaume de Saint-Cloud donne des tables mises au point pour le méridien de Paris; il établit un calendrier pour la reine Marie de France, où il donne divers renseignements astronomiques; il indique la chambre noire pour l'étude des éclipses de Soleil. Au XIV^{e} siècle, Jean de Linières construit une table de sinus; il y eut aussi des tables astronomiques réduites pour Marseille ou pour Paris. Le problème du calendrier commence à être à l'ordre du jour et l'on rencontre des projets de corrections dus à Jean de Meurs, ou à Pierre d'Ailly (né en 1350, recteur de l'Université de Paris), dont le traité *De imagine mundi* fut étudié par Christophe Colomb.

Après le XIV^{e} siècle, si brillant par sa science, l'Université parisienne connut une époque de décadence au XV^e siècle. Nous venons de voir, d'après P. Duhem, les causes de cette décadence.

Le XV^e siècle nous donne, néanmoins, encore un savant de valeur, précurseur de Viète et du calcul logarithmique. Ce fut Nicolas Chuquet, ancien élève de Paris, médecin à Lyon, qui acheva en 1484 un livre très important, *Triparty en la science des nombres*. Il généralise certains résultats d'Oresme (qu'il ne connaissait pas, d'ailleurs). Il remarque la correspondance qui forme la loi du logarithme du produit, en étudiant les suites des puissances de 2 et les suites correspondantes de leurs exposants; il emploie les exposants négatifs et nuls. Il introduit les signes $\bar{p}$ et $\bar{m}$ pour $+$ et $-$. Il étend la notion de racines d'une équation aux quantités négatives, ce que l'algèbre antérieure n'avait pas fait. Pour calculer avec approximation les racines des équations, il forme la moyenne $\frac{a+b}{a'+b'}$ entre $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$. Malheureusement, l'œuvre de Chuquet ne fut publiée que dernièrement, de sorte qu'elle n'a pas pu exercer l'influence qu'on était en droit d'attendre d'elle.

La décadence des sciences au XV^e siècle explique en partie l'oubli qui a couvert injustement les efforts du moyen âge. D'autre part, l'imprimerie n'existant pas encore au moyen âge, les manuscrits étaient beaucoup trop peu nombreux pour faire circuler les idées des maîtres moyenâgeux. Au moment où l'imprimerie paraît, on ne se met pas à éditer les vieux manuscrits des maîtres du XIV^e siècle; en général, on édite des textes de valeur moindre (comme *La Sphère* de Sacrobosco), ou bien des ouvrages contemporains. Tout l'intérêt est attiré vers ces productions nouvelles, d'autant plus que l'atmosphère intellectuelle du XVI^e siècle, imbue de l'esprit de la Renaissance, ne se plaisait pas dans les études austères de la Scolastique. L'oubli vint donc assez vite. De là, il n'y avait plus qu'un pas à faire pour juger injustement les efforts, oubliés et ignorés du moyen âge. Nous arrivons ainsi à rencontrer d'étonnantes affirmations de professeurs de mathématiques du Collège Royal (= Collège de France), comme Pierre Ramus (1515-1572), qui soutint une thèse *Que tout ce qu'a dit Aristote n'est que fausseté,* et qui aimait dire qu'il préférait les suggestions sur le calcul que lui faisaient les marchands, aux démonstrations géométriques; ou encore, comme Charpentier, qui considérait les mathématiques comme « une fange où seul un porc pouvait se complaire. »

Époque de violentes passions politiques ou religieuses; lutte acharnée entre le Collège Royal et la Sorbonne, qui n'avait plus à ce moment des maîtres à la hauteur de ceux du XIVe siècle, pour tenir tête au courant nouveau et pour se faire valoir. L'œuvre du moyen âge fut ensevelie dans ses ruines et dans l'oubli. Des siècles ont passé, où l'on se répétait la fable de l'ignorance du moyen âge scientifique. Les œuvres des mathématiciens parisiens du XIVe siècle, découvertes au XXe siècle, grâce surtout à P. Duhem, montrent que l'ignorance était de notre côté et qu'il y a encore un long travail à faire pour déterrer les vestiges de l'activité scientifique du moyen âge et pour faire revivre, dans sa vraie lumière, la vie scientifique de cette époque, brillante à plus d'un point de vue. Des savants comme L. Thorndike, Haskins, R. Steele, R. Carton, G. Sarton, etc., ont déjà tracé les directions principales des recherches à entreprendre dans ce domaine.

P. Sergescu,

Professeur à l'Université de Cluj.
Correspondant de l'Académie Roumaine.

LA

MÉTHODE AXIOMATIQUE

Par M. F. GONSETH.

Mon exposé va comprendre trois parties :

I. Absence et nécessité d'une Méthode en mathématiques (critique).
II. Recherche d'une Méthode (historique).
III. Esquisse d'une Méthode.

I. — Absence et nécessité d'une Méthode.

1. La méthode, dont j'ai l'intention de vous entretenir, n'est pas une méthode pour traiter telle ou telle catégorie de problèmes posés de façon bien précise, mais bien la Méthode même — avec un M — de la pensée mathématique, formulant, commentant et critiquant les règles et les normes des démarches intellectuelles du mathématicien.

Je sais, par expérience, que certains mathématiciens parmi les meilleurs se sentent violemment heurtés par le seul énoncé de pareilles intentions. Et que, s'ils cédaient à leur premier mouvement, ce serait pour déclarer :

« Cela me suffit ! A supposer qu'elle ait un sens, la question que vous prétendez agiter n'appartient pas aux mathématiques. C'est une de ces questions qui ne comportent pas de réponse dont la vérité se contrôle, et sur lesquelles le mathématicien n'est pas tenu de se faire une opinion. »

Cette fin de non recevoir témoigne d'un point de vue si entier qu'on est tenté de répondre avec une égale vivacité :

« C'est donc que la Méthode authentique de la pensée mathématique a été complètement et définitivement mise au point. Oserais-je demander quand, par qui, et dans quel ouvrage ? »

Mais ces questions ne rencontreront, le plus souvent, qu'une sincère incompréhension : « Qu'est-ce que cette Méthode de la pensée mathématique ? Et quel besoin en avons-nous ? Le mathématicien a-t-il besoin qu'on lui explique ce qui lui est permis et ce qui lui est défendu ? N'en a-t-il pas la connaissance immédiate et intuitive ? La preuve n'en est-elle pas fournie par l'accord qui ne manque jamais de s'établir entre les bons esprits mathématiques, aussi bien sur les évidences, sur lesquelles les démonstrations se fondent, et qu'il est légitime d'invoquer, que sur l'authenticité de la démonstration elle-même.

« Cet accord s'établit parce que les démarches et les aboutissements du raisonnement mathématique sont contrôlables. Il n'y a pas de meilleur critère de l'authentique et du régulier.

« Cet accord cesserait du moment où les questions philosophiques auraient droit d'entrée en territoire mathématique. »

2. Mesdames et Messieurs ! Permettez à mon exposé de faire ses premiers pas en montrant que tous les points de cette dernière déclaration peuvent être contestés avec la plus entière sincérité.

Quant aux évidences, tout d'abord ! J'appellerai ***doctrine de l'évidence*** le point de vue méthodique selon lequel il existe des idées claires et distinctes dont l'esprit s'empare immédiatement et totalement, et des propositions évidentes par elles-mêmes, c'est-à-dire dont la vérité s'impose avec nécessité à tout esprit sain et éclairé. Chacun sait qu'elle était à la base de la méthode scientifique de Descartes. Il est peut-être moins connu qu'elle est encore expressément reconnue par certaines écoles de logiciens. C'est d'ailleurs une de ces idées générales qui continuent à hanter le pays un peu fantomatique des Fondements, et dont on ne sait plus exactement s'il est encore légitime ou non de les accueillir.

Or, je m'étonne de l'indifférence avec laquelle bon nombre de mathématiciens passent sur le fait suivant : que la doctrine de l'évidence, de par sa nature même, est une de ces vues théoriques qu'un seul exemple contraire suffit à réfuter. Or, ce n'est pas une fois, mais cent, et peut-être mille fois, qu'on l'a vue mise en défaut, à propos des parallèles, du continu, des limites, des ensembles, etc.

Que représente l'accord des contemporains en face du témoignage de l'Histoire, qui ne laisse aucun doute sur les profondes variations du sentiment de l'évidence depuis les anciens jusqu'à nous? Chacun le sait : *la crise de l'évidence* est ouverte depuis la découverte des géométries non euclidiennes, et les théories relativistes n'ont fait que la souligner. Chacun le sait : comment expliquer que le monde mathématique s'en montre si peu inquiet, et qu'on continue avec sérénité à invoquer l'évidence comme le dernier fondement du vrai.

3. En même temps que par l'évidence, le mathématicien justifie souvent ses propositions de départ par l'*intuition*, par l'intuition du nombre, par exemple, ou par l'intuition de l'espace. Parmi les fort nombreuses significations plus ou moins vagues du mot intuition, qui toutes donneraient lieu à des remarques analogues, je ne veux prendre pour exemple que celle à laquelle je viens de faire allusion : l'intuition de l'espace.

Dans la façon dont on la fait intervenir se cache une doctrine assez curieuse. Ayant saisi que l'espace dit sensible, est une certaine représentation que nous nous faisons du monde dit physique, et qu'il n'est pas identique à l'espace abstrait dit géométrique, le mathématicien s'imagine volontiers être en possession d'un sens spécial qui lui révèle la structure de l'abstrait à partir de la représentation du sensible : ce sens subtil, c'est l'intuition géométrique. C'est là une doctrine philosophico-psychologique dont il est commode de faire un acte de foi, mais qui peut, en principe, être aussi bien mise en doute que n'importe quelle autre doctrine sur les fondements de la connaissance. Il n'est pas nécessaire de l'analyser longtemps pour y découvrir une variété du réalisme naïf qui posait simplement le réel adéquat à l'idéal.

Or, ces vues réalistes trop sommaires ont été démenties par l'expérience scientifique. Le jour où il est devenu patent que la nature ne nous présente aucune réalisation parfaite de nos concepts abstraits : que, par exemple, ni le fil le plus ténu, ni l'arête la mieux aiguisée, ni le rayon de lumière le plus mince, ne fournissent une authentique réalisation de l'idée de la droite géométrique; ce jour-là, *la doctrine de l'intuition* a été gravement mise en échec.

En un mot : en même temps que les vues atomistiques pénétraient dans la Science, *la crise de l'intuition* s'ouvrait. Il est à peine besoin de remarquer avec quelle impitoyable netteté elle se trouve aujourd'hui soulignée par la physique quantique.

4. Un troisième fondement de la certitude mathématique, c'est la *définition explicite* créant le concept à définir par l'énumération de ses propriétés *essentielles*.

Est-ce par hasard que le mot essentiel vient de se présenter, ou est-ce pour faire une discrète allusion à la vieille logique qui opérait avec les essences et les universaux ? En effet, derrière la croyance à la création totale d'un être abstrait par la définition, il y a encore une fois, informulée il est vrai, mais agissante, une doctrine préalable qui n'est pas très éloignée de ce qu'on appelait autrefois la doctrine de l'école. Évidemment, ce n'est pas sur des définitions telles que celles du cercle ou du triangle qu'on en apercevra les faiblesses. Mais qu'on étende le procédé au delà du champ d'application classique, et les résultats sont loin de rester aussi satisfaisants. Ainsi, par exemple, on s'accorde à penser que la définition suivante de l'ensemble Cantorien :

« L'ensemble est la totalité réunissant tous les objets possédant un attribut bien déterminé, par lequel ils puissent être reconnus pour éléments de cet ensemble »,

porte en germe les antinomies bien connues de l'ensemble de tous les ensembles, ou de l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme élément, par exemple. Quelle conclusion faut-il en tirer ? Aucune, diront les uns, quant à ce que vous nommez le domaine classique des mathématiques, où nulle expérience fâcheuse ne nous attend. Et quant à la théorie des ensembles, qu'on n'en accepte les conclusions qu'avec prudence, en attendant d'avoir découvert le vice caché de la définition précédente.

Le malheur, c'est que nous n'avons aucune règle méthodique pour circonscrire le domaine classique, et que nous ne possédons aucun critère méthodique qui nous permette de décréter que la définition en question n'est pas régulière.

Ce qui est mis en cause par les antinomies, ce n'est pas la sécurité de l'arithmétique, par exemple. Il s'agit à la fois de plus et de moins : il s'agit d'une question de méthode. Tant que je n'aurai pas trouvé le moyen d'opérer le tri entre les définitions qui peuvent donner lieu à une antinomie et celles qui ne le feront jamais, je n'ai désormais plus le droit de prétendre que la définition telle qu'on la pratique est un procédé correct en soi. J'ai perdu la faculté de l'employer sans restrictions et sans précautions, sur lesquelles d'ailleurs la lumière est loin d'être faite. C'est pourquoi il me semble de simple honnêteté de constater que :

La rencontre des antinomies de la théorie des ensembles a inauguré *la crise de la définition* comme procédé méthodique.

5. Venons-en à la démonstration. Est-il vrai que l'on s'entende toujours sur ce qui peut être considéré comme une authentique démonstration ? Encore une fois, on pourrait invoquer le témoignage de l'histoire qui nous montrerait que le sentiment de la rigueur a varié au moins autant que celui de l'évidence. Évidemment, il y a des domaines particulièrement à l'abri, où l'on raisonne aujourd'hui comme l'on raisonnait il y a 2000 ans. Évidemment encore, il n'est pas question de porter le doute sur telle ou telle démonstration dont on ne saurait contester la validité sans mettre en question la mathématique elle-même comme discipline; ce qui serait absurde. Encore une fois, il s'agit d'autre chose, d'une question de méthode dans laquelle mille réussites ne comptent pas en face d'un seul échec. N'arriverait-il qu'une fois que l'opinion du monde mathématicien se trouvât divisée sur une démonstration particulière, les uns la reconnaissant comme régulière, les autres niant son authenticité : du point de vue méthodique, ce seul cas suffirait pour que l'idée de démonstration en soit atteinte. En l'absence de critères formulés, il n'y a que l'infaillibilité reconnue qui puisse être opposée au doute systématique.

Or, cet exemple critique ne peut-il pas être aperçu, entre autres, dans la démonstration de Zermelo du fait que tout ensemble ordonné peut être bien ordonné ? En relisant la dispute célèbre sur cet objet, on s'aperçoit que c'est non seulement la légitimité de l'axiome du choix qui est mise en doute, mais aussi la façon dont il est mis en œuvre (Borel).

D'ailleurs, je reviendrai, de façon encore plus convaincante, dans ma seconde partie, sur la *crise de l'idée de démonstration* qui s'est ouverte ces dernières décades.

6. Dans cette énumération, d'ailleurs incomplète, de notions fondamentales touchées par une crise d'évolution, le terme ultime est enfin l'idée du vrai absolu et sans condition.

Celle-ci avait été déjà sensiblement touchée par l'ébranlement des doctrines de l'évidence et de l'intuition. Mais sa vraie crise s'est ouverte avec la dispute entre les intuitionnistes et les formalistes, dispute sur laquelle il me faudra revenir. A cet endroit, je me bornerai à rappeler en quels termes virulents Brouwer qualifie l'application, jusqu'ici incontestée, de la règle du tiers exclu dans la logique des classes ouvertes.

Il est incontestable que la formalisation de la logique intuitionniste, telle que Heyting l'a présentée, porte dans la logique des questions semblables à celles que la constitution d'une base axiomatique a portées dans la géométrie. Comme à cette dernière occasion le problème de l'espace euclidien, c'est maintenant le *problème du vrai traditionnel* qui se trouve posé.

7. Il ne serait pas difficile de continuer encore ce petit jeu de massacre, en passant en revue les autres notions fondamentales, telles que celles du possible, du nécessaire, de l'arbitraire, etc. De toutes ces notions dites primitives, il n'en est pas une dont le développement naturel des mathématiques n'ait remanié, souvent profondément, le sens. Pas une pour laquelle les vues traditionnelles n'aient été mises en défaut.

C'est donc un pressant devoir de réviser les positions initiales, d'examiner d'un esprit critique la doctrine préalable qui semblait si claire et si inébranlable qu'il paraissait superflu de la formuler. Or, si cet esprit critique sait se soustraire tout d'abord à la pression formidable qu'exerce sur lui l'immense succès de la pensée mathématique et l'existence en fait inébranlée de l'énorme édifice mathématique, ce qui le frappe tout d'abord, c'est une certaine *indigence méthodique*. Les positions méthodiques initiales, que nous avons nommées doctrine de l'évidence, doctrine de l'intuition, doctrine de la définition, etc., ne lui apparaissent pas comme les différentes faces d'une doctrine cohérente, mais bien plutôt comme des vestiges plus ou moins disparates de points de vues démodés ou remaniés. Dans l'idée du vrai, c'est Platon qui dure, dans la définition c'est Aristote; dans l'évidence, c'est le renouveau cartésien qui commence à vieillir. En un mot, ce qui le frappe, *c'est l'absence d'une Méthode autonome et consciemment acceptée*.

II. — Recherche d'une Méthode.

S'il est vrai qu'une Doctrine des vérités élémentaires soit devenue nécessaire, n'a-t-on rien fait pour la dégager ? Au contraire ! L'amorce d'une doctrine de ce genre peut être aperçue dans la plupart des efforts de mise au point dont l'histoire des mathématiques a gardé le souvenir, depuis la première crise de l'irrationnel du temps des Pythagoriciens jusqu'à nos jours.

C'est maintenant de ce point de vue, sous l'angle de la recherche de la méthode authentique, que je m'en vais vous rappeler sommairement quelques faits.

Revenons à la crise de l'évidence. Si l'on admet, par exemple, que le postulat des parallèles puisse être remplacé par un postulat qui le contredise, et que ces deux postulats puissent subsister l'un à côté de l'autre, il est clair que l'un et l'autre perdent leur évidence, et que pour édifier la géométrie, il faut trouver un nouveau principe méthodique.

On a cru le trouver en serrant de plus près la méthode même d'Euclide.

On met en tête de la théorie un certain nombre de concepts primitifs, dont tous les autres concepts pourront être obtenus par une définition explicite et nominale, et un certain nombre de propositions, les axiomes, dont toutes les autres propositions pourront être logiquement déduites.

La pureté de la méthode exigera le renoncement à tout nouvel appel à l'évidence, une fois la base axiomatique posée, c'est-à-dire une fois les concepts primitifs et les axiomes acceptés.

Cette façon de faire est la première variante de la méthode axiomatique. (Selon Weyl c'est à cela, et uniquement à cela que se réduit la méthode axiomatique, si l'on fait abstraction de certaines exigences supplémentaires, qui tiennent déjà d'une esthétique spéciale, concernant l'indépendance mutuelle des axiomes, par exemple.)

Aussitôt formulé, ce principe méthodique développe ses exigences.

Les axiomes, aussi bien ceux de l'ancienne géométrie que des nouvelles, ne trouvent plus leur justification ni dans l'évidence, ni dans l'intuition. De quel ordre est alors leur nécessité ?

Ce sont, dit Poincaré, de simples définitions pour les êtres mathématiques qui y figurent. Et pourquoi les choisir plutôt que d'autres ? Par commodité.

Il est vrai que cette position méthodique, qu'on a appelée le nominalisme de Poincaré, ne se rapporte qu'à l'édification axiomatique de la géométrie. Pour ce qui concerne les concepts primitifs et les propositions de base de l'arithmétique, loin de faire appel à notre libre arbitre, Poincaré fait au contraire appel à la nécessité kantienne des jugements synthétiques *a priori*. Il l'a répété à maintes reprises, en particulier pour le raisonnement de n à $n+1$.

A partir de cette position ambiguë, Poincaré a toute sa vie cherché à combler la brèche ouverte par la défaillance des doctrines de l'évidence et de l'intuition. Mais sans y parvenir de façon convaincante.

9. La méthode axiomatique pose, en effet, encore d'autres exigences qui ne permettent pas de s'arrêter définitivement sur les propositions précédentes.

Pour que les axiomes puissent opérer leur œuvre implicite de définition, il faut que les êtres à définir y entrent vierges de signification *a priori*; que ce soient donc des éléments de nature indéterminée dont les axiomes sont seuls à fixer les propriétés.

Les axiomes ne peuvent d'ailleurs que postuler certaines relations, dont ils fixent également les propriétés à accepter. Comment satisfaire à ces exigences? Comment tenir compte également du fait qu'un système d'axiomes ainsi compris peut comporter plus d'une réalisation, ce que les modèles euclidiens des géométries non euclidiennes, par exemple, mettent clairement en lumière?

On y parvient en se représentant les relations posées par les axiomes comme des relations purement logiques. Le point de vue correspondant est alors celui de l'axiomatique dite hilbertienne.

Le passage du point de vue de Poincaré à celui de Hilbert a d'assez graves conséquences. La différence que le premier maintenait entre les axiomes géométriques et les axiomes arithmétiques doit tomber.

La géométrie analytique et la géométrie à la mode d'Euclide sont, en effet, deux réalisations des mêmes relations logiques. Du point de vue de leur structure logique, elles sont équivalentes. D'où ressort la nécessité méthodique d'établir l'ensemble des mathématiques sur une base axiomatique.

Arrêtons-nous un instant, pour apprécier la solution apportée aux problèmes de l'évidence et de l'intuition. On peut la caractériser d'un mot : On s'est retiré de l'évidence et de l'intuition pour se mettre à l'abri dans le logique pur. On a cherché à éviter le problème mal aisé à résoudre des relations des mathématiques avec le monde sensible, en espérant pouvoir s'en tirer par certaines mesures de police intérieure. En même temps, n'a-t-on pas réussi à fonder l'autonomie complète du raisonnement mathématique, en face du monde extérieur? Le développement de la question ne devait pas confirmer ces espérances.

10. Mais, avant de continuer, examinons si la doctrine hilbertienne de l'axiomatisation ne permet pas aussi de résoudre la crise de la définition. Rappelons que c'est justement dans le but de soustraire la théorie des ensembles aux antinomies auxquelles nous avons fait allusion que Zermelo en fit un exposé axiomatique.

Or, si l'on réfléchit précisément à ce qui sort de la machine à définir que doit représenter un système d'axiomes, on voit surgir une difficulté nouvelle, aussi grave qu'inattendue.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de géométrie. Une des classes d'éléments que nous avons supposés capables d'entrer dans certaines relations purement logiques, est, supposons-le, la classe des droites. Rien ne m'empêche de leur donner ce nom. Mais rien ne m'oblige, ni même ne m'autorise à les considérer *comme identiques* aux droites dont la géométrie au sens ordinaire s'occupe. Pour désigner le rapport d'un genre tout à fait spécial existant entre certains concepts et certaines relations géométriques d'une part, les éléments logiques et les relations purement logiques que l'on peut en abstraire, d'autre part, nous avons déjà employé le mot de réalisation : dans notre exemple, les droites géométriques sont une *réalisation* de la classe des éléments logiques auxquels nous avons donné le même nom.

Toute l'expérience mathématique démontre qu'il existe une correspondance des plus étroites entre l'abstrait et ses réalisations. Quelle est la position en quelque sorte traditionnelle des mathématiques sur ce point? Bien entendu, on chercherait en vain dans la littérature reconnue un passage formulant explicitement la doctrine universellement acceptée. L'usage fait ici loi. Or on imagine une sorte d'équivalence infaillible entre l'abstrait et la réalisation, selon laquelle il suffit de saisir l'un pour posséder l'autre. Cette pratique équivaut à un point de doctrine.

Or, c'est encore une fois une doctrine qui, à l'examen, révèle des insuffisances frappantes.

Bornons-nous à raisonner dans le cadre de la géométrie. On commence à s'accorder pour envisager la géométrie comme un des premiers chapitres, comme un chapitre particulièrement bien réussi, de la physique des corps rigides. Or dans le cadre méthodique de la physique, quelle forme le problème des relations de l'abstrait à la réalisation va-t-il prendre ? On le retrouve presque tel quel dans le problème des relations des lois naturelles observées aux lois naturelles correspondantes déduites à partir d'une théorie. Ce seul rapprochement fait entrevoir que la position traditionnelle du mathématicien est trop étroite, et que les domaines annexes ne peuvent l'accueillir telle quelle. De toutes façons, comme position de doctrine, elle préjuge la solution d'un problème de la connaissance d'une façon qui perd son évidence, si l'on s'éloigne du domaine des mathématiques classiques. Praticable sans inconvénient, semble-t-il, dans ce domaine elle devient bientôt absurde si l'on cherche à l'étendre à tout le champ de la pensée abstraite et théorique, sans qu'on sache indiquer les frontières au delà desquelles naît le danger.

En d'autres termes : Sur ce point comme sur tant d'autres, règne la même insécurité méthodique, que la sécurité pratique dont jouit, à juste titre semble-t-il le mathématicien, ne fait que souligner.

11. Mais laissons ce point de côté. Du moins la situation est-elle complètement éclaircie sur le plan de l'abstrait ?

Il est clair qu'ici, un assemblage complètement arbitraire de concepts primitifs et d'axiomes n'est pas, de droit, une base axiomatique acceptable. Il ne faut pas, par exemple, que deux axiomes se contredisent. Plus généralement, il ne faut pas que la déduction à partir d'une base axiomatique rencontre de contradiction.

Comment distinguer entre les systèmes contradictoires et ceux qui ne le sont pas ? Il semble que, pour que le procédé d'axiomatisation hilbertien puisse être accepté comme une méthode définitive, il doive se compléter de critères permettant de distinguer si une base axiomatique est, ou non, contradictoire. Ou du moins faudrait-il faire voir que les systèmes axiomatiques à partir desquels tout l'édifice mathématique doit être rebâti n'impliquent pas contradiction. C'est ce qu'on appelle le problème de la non-contradiction.

Remarquons que les exigences méthodiques, à elles seules, y conduisent avec nécessité. Tant que ce problème restera en suspens, la méthode axiomatique hilbertienne n'aura pas trouvé sa clef de voûte.

Les premières tentatives de Hilbert pour parachever sa doctrine sur ce point n'ayant pas réussi de façon convaincante, le problème avait été mis en veilleuse, jusqu'au moment où la critique intuitionniste devait lui rendre toute son acuité et toute son actualité.

L'intuitionniste mettant en cause bon nombre de résultats considérés jusque-là comme acquis authentiquement, Hilbert entreprit de répondre avec éclat en mettant à jamais les mathématiques à l'abri de la critique, c'est-à-dire en fournissant la démonstration manquant encore de la non-contradiction.

Ce qui suivit représente un bien curieux épisode mathématico-philosophique. Je me permets de dire philosophique, car, à mon avis, toute la question tourne autour d'un point de méthode, qui s'évoque par la question : Qu'est-ce au fond qu'une démonstration ?

Il s'agit, en effet, d'établir l'excellence de la démonstration classique, en général, par une nouvelle démonstration. Mais si le doute est permis quant aux premières, pourquoi ne s'attacherait-il pas à cette dernière ? La discussion préalable est donc inévitable et portera sur la nature, sur l'idée même de la démonstration. Or ceci n'est plus une question orthodoxe. Ce n'est plus la simple mise en œuvre des moyens de preuves implicitement connus à partir d'une configuration initiale bien déterminée. Il s'agit au contraire d'une explicitation des moyens de la preuve, en général, du point de vue méthodique. Il s'agit en quelque sorte de découvrir et de proposer un modèle définitif et authentique de la démonstration.

En d'autres termes, la démonstration se trouve avoir besoin d'une critique, d'une théorie préalable pour que le sens authentique en soit fixé. Il y a là un moment d'une importance capitale à fixer : c'est celui où le mathématicien, pour les besoins mêmes de son activité, doit revenir sur la signification des notions premières dont il se sert.

Le moment où le mathématicien est contraint, par les nécessités de sa propre méthode, non pas de faire appel à la philosophie, mais de se faire son propre philosophe. Le moment où, au sein des mathématiques orthodoxes, la question de la méthode de la pensée mathématique s'est trouvée expressément posée.

12. D'ailleurs, la doctrine préalable que propose Hilbert est fort conforme au plus orthodoxe génie mathématique. A l'aide d'une formalisation dont la logistique a fourni le modèle, toutes les hypothèses de la démonstration doivent être mises en formules, l'ensemble de celles-ci pouvant être appelé la configuration symbolique initiale. C'est sur celle-ci que l'activité démonstrative va s'exercer. Comment ? Les règles orthodoxes de la démonstration, après la formalisation totalitaire, ont pris la forme de règles pratiques selon lesquelles les symboles sont à manier, à déplacer, à remplacer l'un par l'autre, etc.

Ces règles contiennent toutes les opérations licites sur les symboles. Et démontrer, c'est transformer la configuration initiale en une configuration finale, en appliquant ccs règles à l'exclusion de toutes autres.

Et quant au reste, c'est-à-dire quant à savoir si telle configuration répond à tel modèle, et si j'applique les règles de façon conforme, l'évidence et l'intuition en décideront.

En un mot, grâce à la formalisation, le monde des idées mathématiques est projeté sur un monde-miniature concret de symboles, dans lequel un certain jeu avec ces symboles remplace les démarches primitives de la démonstration. Voilà une brusque rentrée en scène, par la petite porte, de l'évidence et de l'intuition dont on croyait avoir pris solennellement congé.

C'est à la doctrine que je viens d'évoquer sommairement que s'attache le nom de formalisme. Elle ne fait d'ailleurs que conférer une valeur méthodique à des procédés courants, en exigeant une formalisation systématique et simultanée de la totalité des mathématiques. Il n'est pas à contester que la formalisation soit un des procédés fondamentaux par lesquels la pensée mathématique progresse. On peut cependant observer que saisir l'abstrait par son symbole n'est que la réplique de saisir la réalité dans l'abstrait, procédé qui nous avait paru faire le fond de la définition implicite par les axiomes. Ces deux procédés se répondent et se complètent l'un l'autre. Toute méthode doit certainement souligner leur importance méthodique. Mais tout autre chose est d'accepter le formalisme comme justification dernière de la démonstration. Car, en tant que doctrine, il commence par poser comme un fait une certaine équivalence absolue entre le symbole et le symbolisé. Le moins qu'on puisse objecter, c'est que cette façon de procéder tranche sans l'avoir suffisamment examiné le problème des relations du concret à l'abstrait.

13. On peut présenter au formalisme pris comme méthode des mathématiques d'autres objections de principe qui ne laissent aucun doute sur son insuffisance. Nous ne nous y arrêterons pas, car une expérience mathématique bien conduite a tranché le débat. Gödel a, en effet, montré selon les règles ordinaires de la démonstration, que les systèmes formalisés ne sont pas à l'abri de certains paradoxes, qui remettent tout le point de vue en question. La grandiose tentative d'Hilbert finit par s'enliser dans une Crise de l'idée même de démonstration.

Est-ce à dire que cette voie soit d'ores et déjà reconnue comme impraticable? Pas du tout. Gentzen a déjà proposé certaines modifications des règles fixant le licite et l'illicite dans le jeu des symboles, modifications qui permettraient de reprendre en main la démonstration de l'absence de contradiction.

Mais, dès maintenant, nous sommes suffisamment avertis par l'expérience pour ne plus pouvoir accepter de proposition de ce genre sans en exiger une justification. Si l'idée orthodoxe de la démonstration n'a plus été jugée claire par elle-même, et si les moyens imaginés pour la soutenir se sont révélés inefficaces, où trouverai-je la garantie que les nouveaux fondements qu'on me propose ne nous décevront pas à leur tour? Fera-t-on appel à une intuition interne, dernier refuge du vrai? Comment se défendre alors contre les doctrines intuitionnistes qui invoquent à leur profit l'intuition du nombre et de ce qu'il est licite et illicite de faire dans la suite des nombres.

14. Ne nous arrêtons pas au caractère, semble-t-il, assez décevant du résultat de tant d'efforts et de tant de recherches. Essayons plutôt en les ramassant dans un coup d'œil, d'apercevoir à quelles intentions communes ils répondaient et quel but commun ils poursuivaient.

S'il m'était possible de mettre en parallèle avec les péripéties de la méthode axiomatique, celles de la logistique tendant à embrasser tout le champ mathématique par les moyens de la définition explicite complétée par la déduction formalisée, et finissant par se heurter à des difficultés au fond analogues à celles que rencontre la méthode axiomatique, s'il m'était possible de placer la théorie des ensembles sous le même jour, d'évoquer les célèbres disputes sur le prédicable ou sur le constructible, vous ne pourriez manquer de conclure que la pensée mathématique a lentement glissé hors des positions méthodiques traditionnelles, et qu'elle recherche une nouvelle position méthodique où la crise des fondements trouverait sa solution naturelle. *Toutes ces tentatives semblent appeler la méthode, devenue nécessaire, des sciences mathématiques.*

III. — Esquisse d'une Méthode.

15. Ainsi donc, dira-t-on maintenant, la recherche de la Méthode n'a pas abouti! Bien au contraire! répondrons-nous. Tous les éléments essentiels en ont été découverts. Il suffit de vouloir s'en servir, pour opérer une nouvelle synthèse.

16. Il faut d'abord être au clair sur ce qu'on peut exiger d'une Méthode, dans une discipline comme les Mathématiques. C'est tout d'abord d'énumérer toutes les règles dont la pratique de la discipline ne doit pas s'écarter, de formuler authentiquement « la loi écrite ».

Mais lorsqu'on s'est rendu compte que les règles finissent toujours par s'ancrer dans un certain nombre d'idées primitives, telles que celles de l'évident, de l'intuitif, de l'arbitraire, du possible, du nécessaire, etc., on comprend que le rôle de la Méthode doit être aussi de normaliser l'emploi de ces notions premières qui informent toutes les autres.

La Méthode cartésienne nous en fournit déjà l'exemple. A côté des Regulæ, elle fait encore intervenir, comme élément essentiel, l'idée de la lumière naturelle de l'esprit, sans laquelle ce dernier ne serait pas capable de voir les évidences.

En un mot, la Méthode doit présider, comme principe ordinateur, au jeu des idées fondamentales, à leur accord, à leur opposition, à leur mise en relation ou, ce qui dit tout en un mot, à leur interprétation.

On trouvera peut-être paradoxale, au premier moment, cette volonté de dégager par la raison une méthode que l'on acceptera consciemment et qui sera capable de provoquer une espèce de mutation de l'interprétation des notions primitives. Mais, à la réflexion, on s'aperçoit que c'est là un pouvoir propre à la réflexion même. Aussi vrai que $2 + 2 = 4$, la critique de la pensée est capable d'exercer une influence sur le déroulement et le contenu de la pensée. Il n'est finalement aucune de nos notions que la critique ne sache atteindre, si primitive soit-elle, pourvu que nous en ayons pris conscience. Car, pour ainsi dire par définition, le domaine naturel où la critique s'exerce est tout le champ de la conscience.

Il n'y a donc rien que de très normal à entreprendre cette révision des principes fondamentaux de notre activité intellectuelle.

17. Toutefois, avant de déloger la pensée mathématique de son assise traditionnelle, ne conviendrait-il pas d'indiquer le point de vue d'où il sera possible de porter un jugement qui l'atteigne, et de distinguer en quoi elle est susceptible de pécher.

La chose est toute simple. Le point de vue d'où la pensée mathématique peut être, de droit, appréciée, c'est celui de l'expérience scientifique elle-même, dans son intégrité, dont l'expérience mathématique forme un moment des plus importants, mais un moment seulement.

Si, pour reprendre un lieu commun, l'exploration de l'espace physique nous révèle que nous ne sommes en mesure, ni de construire, ni d'indiquer aucune réalisation adéquate de la droite idéale, c'est là un fait qui ne peut pas être récusé. Prétendre qu'il n'intéresse pas la géométrie rationnelle, c'est se placer à un point de vue singulièrement superficiel et conventionnel.

Si, de façon analogue, l'exploration du monde atomique fait soupçonner que le schème de l'espace-temps, aussi bien du point de vue des représentations intuitives que de celui des descriptions théoriques, ne se prête pas fidèlement à une reproduction intelligible des phénomènes, notre premier mouvement peut être de déclarer que nos vues sur la nature des abstraits géométriques n'ont point à en tenir compte. Mais si l'on ne veut pas se satisfaire d'une affirmation gratuite, si l'on recherche la justification « de méthode » d'un jugement aussi catégorique, il apparaît bientôt que les vues traditionnelles sur l'évidence ou le nécessaire dont nous avons déjà parlé en forment l'unique garantie. L'analyse objective des fondements de la géométrie nous ramène, au contraire, constamment devant le problème des rapports de la structure du monde objectif à la structure de notre intuition, et des rapports de celle-ci aux schèmes abstraits.

En un mot : l'expérience mathématique ne saurait être soustraite aux influences de l'expérience dans les sciences annexes.

L'erreur d'une certaine mentalité mathématique, c'est de ne pas accepter qu'on la juge, sinon de son propre point de vue. C'est de croire qu'à elle seule, par le truchement de ses notions primitives, elle a pu trancher presque sans y prendre garde le problème qui, par ailleurs, reste en suspens sur tout le front de la recherche scientifique : *celui des rapports du concret à l'abstrait.*

18. Les idées qui permettent d'intégrer l'expérience mathématique dans la perspective d'ensemble de la connaissance actuelle sont fort simples. Ce sont celles de *schéma*, de *correspondance schématique* et d'*abstraction par schématisation.* Nous allons en dire quelques mots. Je m'excuse de faire appel, pour m'expliquer, à l'exemple le plus banal qui soit : à une carte géographique. Une carte géographique est un schéma descriptif, dont je vais me permettre de vous rappeler certains caractères. Nous offre-t-elle une description parfaitement fidèle? Certainement pas! Nous n'y trouvons ni les arbres de la forêt, ni la blancheur de la route, ni tous les capricieux méandres de la rivière. Non seulement la carte renonce à tout décrire, mais la description qu'elle nous donne est *simplifiée, sommaire.*

Les villes, les routes, les sommets de montagnes ne sont indiqués que par des signes conventionnels, par des symboles qu'il faut savoir interpréter.

Si la carte ne mentionne pas tout, rien n'empêche de la compléter sur tel ou tel point : elle est toujours *inachevée.*

Sommaire, symbolique, inachevé, ce sont trois caractères essentiels de tout schéma.

Remarquons enfin que si les signes dont le cartographe se sert sont plus ou moins conventionnels, ils ne sont cependant pas arbitraires. La carte est la manifestation d'une technique spéciale, à laquelle bon nombre de connaissances préliminaires collaborent.

Ce que la carte prétend décrire, tel ou tel pays dans sa réalité propre, nous l'appellerons sa *signification extérieure*. Considérée en elle-même, comme objet autonome, elle possède aussi une certaine réalité propre : nous parlerons de sa *structure intrinsèque.*

Rien n'empêche d'examiner cette dernière pour elle-même, sans se soucier du sens qu'elle prend lorsqu'on la consulte en relation avec sa signification extérieure. Même ainsi envisagée comme un dessin sans intention, la carte pose maints problèmes (de géométrie, de topologie, de coloriage, etc.), qu'il peut être utile de résoudre. *En raisonnant ainsi intrinsèquement dans un schéma*, on le détourne de sa signification originelle : c'est souvent pour mieux se saisir de celle-ci.

19. Reportons ces quelques idées dans la géométrie. Commençons par distinguer les trois aspects sous lesquels celle-ci se présente. En voulant contrôler par des mesures topographiques (comme Gauss l'avait entrepris) que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, on fait de la géométrie une *science naturelle et expérimentale.*

On peut suivre chez le petit enfant la genèse, la constitution progressive de la *représentation intuitive de l'espace.*

Telle qu'Euclide l'exposait 300 ans av. J.-C. la géométrie, enfin, était déjà une *science rationnelle.*

Fait peut-être inattendu, c'est sous cette dernière forme qu'elle se prête le plus facilement à l'intervention de la notion de correspondance schématique. Tout ce que l'on peut dire sur les rapports de l'abstrait géométrique à ses réalisations concrètes se résume fort bien en ces mots :

La géométrie (élémentaire) est un schéma d'idées, dont il faut chercher la signification extérieure dans une certaine structure naturelle du monde physique.

La structure intrinsèque de ce schéma, c'est sa structure logique. Elle apparaît dans la possibilité de l'édifier axiomatiquement. Expliquons-le par analogie avec la carte géographique. Une fois dressée, disions-nous, celle-ci se prête au raisonnement intrinsèque qui la prend pour objet dans sa réalité propre. De même, dresser le schéma géométrique, c'est concevoir, à partir du monde des phénomènes, un certain nombre d'idées simplificatrices, sommairement justes, en même temps que certaines relations, les axiomes, formes schématiques de certaines liaisons naturellement nécessaires. Raisonner intrinsèquement, c'est simplement expliciter les nécessités propres à ces idées simplificatrices, c'est dérouler la chaîne des conséquences « intrinsèquement nécessaires ». En un mot : raisonner intrinsèquement, c'est simplement raisonner logico-géométriquement, comme nous en avons l'habitude.

20. Je me rends bien compte de ce que ces explications trop hâtives peuvent avoir d'insuffisant. Je m'attends à ce que l'on m'objecte : « Ce ne sont là que des suggestions dont il faudrait encore établir le bien-fondé. Vous faites intervenir l'idée de schéma comme nouvelle idée primitive! Mais comment celle-ci vous est-elle, elle-même, donnée. Comment savez-vous qu'elle se montrera plus sûre que les idées primitives dont le mathématicien s'est contenté jusqu'ici? »

On ne peut répondre à ces légitimes objections que par une étude approfondie des fondements. C'est ce que je crois avoir fait dans mon Ouvrage : *Les Mathématiques et la Réalité,* non seulement en ce qui concerne la géométrie, mais sur tout le front des mathématiques et de la logique. Voici ce qu'après cette étude, je me crois en droit de répondre.

On a raison de penser qu'il est ridicule de vouloir fonder une philosophie mathématique sur une notion apportée du dehors, toute faite et toute prête, même si celle-ci devait être celle de concordance schématique entre l'abstrait et le concret. Mais c'est marquer une profonde incompréhension pour la tentative que j'esquisse, que de croire que c'est là sa dernière intention. Non seulement la notion de schéma n'entre pas définitivement constituée dans la *synthèse à faire*, non seulement elle ne représente qu'une suggestion à poursuivre, conçue tout d'abord elle-même sommairement, *grosso modo*. Non seulement il en est de même pour tous les termes employés, comme ceux de signification extérieure, de réalité en soi, de raisonnement intrinsèque, qui ne devaient avoir qu'une valeur suggestive, propre à une orientation préalable. Mais est-il besoin d'insister sur ce fait évident : Que les *mots* n'ont pas de signification par eux-mêmes! Qu'ils n'ont que la signification de leur emploi! Qu'ils ne sauraient contenir autre chose que ce que nous aurons *su concevoir*. Que le sens du mot « schéma » à partir de sa signification grossièrement ébauchée, sera fait du rôle que nous aurons su lui faire jouer; qu'il se fera par les processus mentaux dans lesquels nous l'aurons engagé.

J'y insiste, parce que c'est le point culminant, décisif de mon trop sommaire exposé : On n'exigera pas de la méthode axiomatique qu'elle réalise telle ou telle idée préconçue, encore inexistante, parce que encore impensée, de la concordance schématique. Au contraire, la méthode axiomatique, telle que deux millénaires d'efforts l'ont faite, doit s'incorporer l'*idée* « en devenir de schéma », et fournir la voie même de sa constitution.

C'est dans ce sens que nous disons :

La constitution de la géométrie en système axiomatique fournit le modèle même du processus d'abstraction par schématisation ;

la pensée, dans sa progression, constituant elle-même, par sa poussée autonome en accord avec la connaissance en devenir du réel, les normes de son activité;

la Méthode de la pensée mathématique transparaissant ainsi à travers les démarches mêmes de la pensée mathématisante.

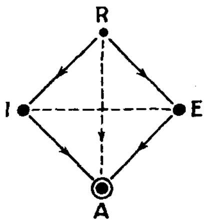
Et l'on doit en dire autant de tous les termes que nous avons employés : En opposition avec sa signification extérieure, le schéma prend figure d'abstrait; en opposition avec le schéma, l'objet (extérieur) de ce dernier prend signification de concret. Abstrait et concret relatifs l'un à l'autre et dont l'opposition mutuelle fait partie de leur signification.

21. Ce que je viens de dire n'est que l'indication d'un changement, radical il est vrai, de point de vue, n'est que l'énoncé de l'idée dominatrice qui devra informer toutes les vues méthodiques. J'aurais naturellement à indiquer maintenant comment s'organise dans le détail un système conceptuel qui s'en inspire. J'aurais en particulier à indiquer, tout d'abord dans le cadre restreint de la géométrie, comment les doctrines préalables traditionnelles de l'évidence, de l'intuition, de la définition nominale, etc., sont à remanier. Et à faire voir qu'elles sortent suffisamment renouvelées de cette refonte, pour que toutes les crises que nous avons commencé par énumérer puissent être considérées comme dénouées — au moins provisoirement. Je ne puis faire plus ici qu'invoquer mon étude, récemment parue : *Qu'est-ce que la logique?* et quelques-unes de ses conclusions :

Les représentations intuitives, y est-il dit, *sont des images schématiques conformes à nos fins. La connaissance a priori n'est qu'un ensemble orienté, ordonné, structuré de vues sommaires.*

La connaissance expérimentale ne se révèle pas de nature essentiellement différente : elle prolonge, complète, retouche la connaissance intuitive. La science recueille et relaie le bon sens, l'intuition commune.

Les rapports entre les abstraits, les connaissances expérimentales et intuitives relatives au même objet peuvent être sommairement représentées par le schéma suivant :



R y représente une réalité extérieure (qui n'est d'ailleurs pas donnée en soi). A est un abstrait schématiquement adéquat à R, et la flèche verticale signifie que le processus dont A est le terme est celui de l'abstraction par schématisation.

I est une connaissance intuitive, E une connaissance expérimentale. Les quatre flèches obliques signifient, à leur tour, que pour concevoir les rapports qu'elles évoquent, *il faut, chaque fois d'une façon* différente, prendre la relation de R à A comme modèle schématique : qu'on peut les envisager comme quatre réalisations de l'idée de concordance schématique.

22. On voit déjà, dans le cadre restreint de la Géométrie il est vrai, les idées fondamentales du concret et de l'abstrait, du réel et du rationnel, de l'intuitif et de l'expérimental s'organiser et s'ordonner en une nouvelle systématique.

On remarquera combien la façon dont la méthode axiomatique doit être interprétée a profondément varié. Au lieu de n'être qu'un simple regroupement de notions toute faites et données d'avance, et de relations déjà complètement déterminées, elle devient au contraire le modèle même du processus mental *sui generis* et irremplaçable, au terme duquel se trouvent ces abstraits sommairement adéquats à une réalité elle-même sommairement saisie, que nous avons nommés les abstraits par schématisation.

Autour de ce premier centre, peut maintenant s'opérer une cristallisation générale.

Avec quelque concentration d'esprit, il n'est pas très difficile de reconnaître que l'arithmétique peut être complètement repensée selon les mêmes voies méthodiques. La différence que faisait Poincaré entre l'intuition géométrique et l'intuition du nombre devient superflue.

Bien plus, la logique elle-même peut être conquise. L'axiomatisation soigneusement faite, selon la nouvelle interprétation, en fait apparaître distinctement les divers aspects, trop souvent confondus. Comme logique de l'existence, elle pourrait être appelée une Physique de l'objet quelconque : une Physique théorique une fois l'axiomatisation effectuée, une Physique expérimentale ou intuitive, avant le passage définitif à l'abstrait.

Comme logique du vrai, comme logique du possible, elle schématise d'autres faces de nos rapports avec le monde.

Saurons-nous retrouver le point de vue hilbertien? Sans aucune peine! Par une nouvelle abstraction axiomatique, qui prend les premiers abstraits comme concrets, et en dégage l'abstrait plus général des relations purement logiques. Cette axiomatisation est, en même temps, la charte de constitution du logique pur.

Saurons-nous intégrer le formalisme et la représentation par les symboles? De façon toute naturelle, la formalisation, dans le nouveau cadre méthodique, n'étant qu'un retour à une réalisation plus commodément maniable.

23. Ce que nous avons nommé l'idée dominatrice est donc capable d'informer la pensée mathématique dans toutes ses articulations. Elle déborde également sur les domaines annexes. L'assimilation de la géométrie, de l'arithmétique et de la logique à certains chapitres de la physique trouve sa récompense en ceci : Que la relation, *en général,* entre l'expérimental et le théorique peut aussi être pensée sur le modèle de la concordance schématique entre un abstrait et un concret.

En psychologie, le même modèle peut rendre les mêmes services pour expliciter, par exemple, les rapports entre ce qu'on pourrait appeler les *catégories intuitives* de la causalité ou de l'analogie et les lois naturelles qui sont les *principes* de causalité ou d'analogie.

En sociologie, la méthode axiomatique ainsi comprise permet d'accéder aux concepts fondamentaux d'une économique rationnelle, etc.

24. En somme, en s'incorporant l'idée de correspondance schématique, et en tant que modèle en devenir du processus de la constitution des abstraits schématiques, non seulement la méthode axiomatique est susceptible de prendre figure de « Méthode de la pensée mathématique »; elle réintègre encore les mathématiques dans leur qualité de modèle des autres sciences.

F. GONSETH

(Zurich).

SUR LES

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES A TROIS DIMENSIONS

DE GENRES UN

CONTENANT DES INVOLUTIONS CYCLIQUES

Par M. L. GODEAUX.

Nous avons étudié, dans des travaux antérieurs, les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis [1]. Les points unis d'une telle involution peuvent être de deux sortes, suivant que la transformation birationnelle génératrice de l'involution détermine, dans le faisceau des tangentes à la surface au point uni, l'identité ou non. Dans le premier cas, on a un point uni parfait, dans le second, un point uni non parfait.

Considérons une variété algébrique V à trois dimensions et supposons qu'il existe, sur cette variété, une involution I_p, cyclique, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Dans la gerbe des tangentes à la variété V en un point uni A, la transformation birationnelle T, génératrice de l'involution, détermine, soit l'identité, soit une homologie, soit une homographie non homologique. Nous aurons donc à considérer trois espèces de points unis.

(1) On trouvera un résumé de nos recherches et la bibliographie relative à la question dans notre exposé, *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient. et industr.*). Paris, Hermann, 1935. *Voir* aussi, dans la même collection, nos exposés : *Questions non résolues de géométrie algébrique. Les involutions de l'espace et les variétés algébriques à trois dimensions* (1933). *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (1934).

Nos premières recherches sur les involutions appartenant à une surface algébrique ont porté sur le cas où la surface support de l'involution est de genres un ($p_a = P_4 = 1$); on trouve alors comme surfaces images des involutions, soit des surfaces de genres un, soit des surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Nous commencerons également nos recherches sur les involutions appartenant à la variété V dans l'hypothèse où celle-ci est de genres un.

Précisons nos hypothèses. Un système linéaire de surfaces, $|F|$, tracées sur la variété V, possède un adjoint $|F'|$, formé des surfaces découpant, sur les surfaces F, les courbes canoniques de celles-ci. $|F'|$ possède à son tour un adjoint $|F''|$, que l'on appelle le biadjoint de $|F|$, et ainsi de suite [1]. Si le $k^{\text{ième}}$ adjoint de $|F|$ coïncide avec ce système, aucun des adjoints précédents ne possédant la même propriété, la même particularité se présente pour tout système linéaire de surfaces tracées sur V et nous dirons que sur cette variété, l'opération d'adjonction a la période k. La variété V est alors dépourvue de surfaces canonique, bicanonique, ..., $(k-1)$-canonique, mais possède une surface k-canonique d'ordre zéro. Et bien, nous supposons que sur la variété V support des involutions étudiées, l'opération d'adjonction a la période un, tandis que sur les variétés images des involutions, l'opération d'adjonction est périodique. On voit du reste aisément que cette période ne peut être que un ou p.

Nous avons déjà étudié antérieurement les cas $p = 2$ et $p = 3$, ce qui nous a permis d'établir l'existence de variétés sur lesquelles l'opération d'adjonction a la période deux ou trois [2]. Dans ce travail,

---

(1) En ce qui concerne les fondements de la géométrie sur une variété algébrique à trois dimensions, consulter F. Severi, *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1909, t. 28, p. 33-87).

(2) *Sur les involutions du second ordre appartenant à certaines variétés algébriques à trois dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, 9 déc. 1935, p. 1169-1170); *Sur une variété algébrique à trois dimension de bigenre un* (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1937, p. 93-101); *Sur quelques variétés algébriques à trois dimensions ayant des surfaces canonique et pluricanonique d'ordre zéro* (*id*, p. 200-218); *Une variété algébrique à trois dimensions sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois* (*id.*, p. 335-342); *Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1937, p. 82-96); *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1937, p. 55-79).

nous supposons p quelconque (premier) et nous étudions l'influence des points unis de première et de seconde espèce; nous sommes parvenu à déterminer la structure de ces points unis satisfaisant au problème posé.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier p; soit T la transformation birationnelle de V en elle-même génératrice de l'involution. Nous supposerons que l'involution I_p possède au plus un nombre fini de points unis, isolés, simples pour la variété et non fondamentaux pour la transformation T.

Considérons un point uni A de l'involution I_p et soit α l'espace à trois dimensions tangent à V en A. La transformation T détermine, dans le domaine du premier ordre du point A sur la variété V, une certaine opération; en d'autres termes, elle implique l'existence d'une certaine homographie H, de période p, dans la gerbe de rayons de sommet A, appartenant à l'espace α. Cette homographie peut être l'identité, une homologie ou une homographie non homologique. Nous sommes donc conduit à répartir les points unis de l'involution I_p en trois catégories :

1° Points unis de première espèce ou points unis parfaits. En un tel point, l'homographie H est l'identité et tous les points du domaine du premier ordre de ce point sur V sont unis pour T.

2° Points unis de seconde espèce. En un tel point, H est une homologie et dans le domaine du premier ordre de ce point sur V, il y a une ligne de points unis et un point uni isolé.

3° Points unis de troisième espèce. En un tel point, H est une homographie non homologique et dans le domaine du premier ordre de ce point sur V, il y a trois points unis.

Soit V′ une transformée birationnelle de V choisie de telle sorte qu'au point A corresponde une surface exceptionnelle φ' (rationnelle). A T correspond une transformation birationnelle T′ de V′ en elle-même et pour cette transformation T′, la surface φ' est unie. Si A est un point uni de première espèce, tous les points de φ' sont unis pour T′; si c'est un point uni de seconde espèce, il existe sur la surface φ' un point uni isolé et une courbe (rationnelle) de points unis; si enfin A est un point uni de troisième espèce, la surface φ' contient trois points unis isolés pour T′.

Observons d'ailleurs que les points unis isolés de φ' pourront à leur tour être classés en trois catégories comme les points unis de T, et ainsi de suite.

2. Soit $|L_1|$ un système linéaire de surfaces tracées sur la variété V, simple, n'ayant pas pour points-base des points unis de I_p. Les transformations T, T^2, ..., T^{p-1} font correspondre à $|L_1|$ des systèmes linéaires $|L_2|$, $|L_3|$, ..., $|L_p|$, simples, n'ayant pas pour points-base des points unis de I_p, puisque par hypothèse ceux-ci ne sont pas fondamentaux pour la transformation T. Considérons le système linéaire complet

$$|F| = |L_1 + L_2 + \ldots + L_p|.$$

Il est transformé en lui-même par T et cette transformation opère comme une homographie cyclique sur les éléments de $|F|$.

Désignons par $|F_1|$ le système linéaire de surfaces F, composé au moyen de I_p, de dimension maximum, comprenant les surfaces $L_1 + L_2 + \ldots + L_p$. Ce système $|F_1|$, d'après les hypothèses faites, n'a pas pour points-base des points unis de I_p et ne peut être composé au moyen d'une involution distincte de I_p.

En répétant le raisonnement que nous avons eu l'occasion de faire ailleurs, dans le cas $p = 3$ ([1]), on montre que l'on peut supposer que :

1° Le système $|F|$ est plus ample que le système $|F_1|$ et est donc simple;

2° Le système $|F|$ contient, outre $|F_1|$, $p-1$ systèmes linéaires partiels $|F_2|$, $|F_3|$, ..., $|F_p|$, composés au moyen de l'involution I_p;

3° La dimension de $|F|$ et celle de $|F_1|$ peuvent être supposées aussi grandes qu'on le veut.

Il suffit de remplacer éventuellement $|F|$ par un de ses multiples convenablement choisi.

Nous désignerons par r la dimension de $|F|$, par r_1, r_2, ..., r_p celles de $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$ respectivement. On a, d'ailleurs, d'après la théorie des homographies cycliques,

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_p + p = r + 1.$$

Rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. A la variété V correspond biration-

---

(1) *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre* (*loc. cit.*).

nellement une variété que nous désignerons toujours par V. A T correspond une transformation birationnelle de la nouvelle variété V en elle-même, échangeant entre elles les sections hyperplanes de cette variété; cette transformation est donc déterminée par une homographie de S_r, homographie que nous désignerons encore par T.

Le système $|F|$ contenant p systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_p, l'homographie T possède p axes ponctuels (espaces linéaires lieux de points unis) que nous désignerons par $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(p)}$ et dont les dimensions sont respectivement $r_1, r_2, \ldots, r_p$.

Soit Σ_i le système des hyperplans de S_r passant par tous les espaces $S^{(1)}, \ldots, S^{(p)}$ sauf par $S^{(i)}$. Les surfaces du système $|F_i|$ sont découpées sur V par les hyperplans de Σ_i.

En particulier, les surfaces du système $|F_1|$ sont découpées par les hyperplans de Σ_1; ce système n'a pas pour points-base des points unis de I_p, par conséquent les points unis de l'involution I_p appartiennent tous à l'axe $S^{(1)}$. L'ensemble des points communs à cet axe et à la variété V est celui des points unis.

Soient A un point uni, α l'espace à trois dimensions tangent à V en ce point. L'espace α est transformé en lui-même par l'homographie T. Les points unis de I_p étant par hypothèse isolés, l'espace α n'a que le point A en commun avec l'axe $S^{(1)}$. Dans α, T détermine une homographie H ayant le point uni isolé A.

Suivant que le point uni A est de première, de seconde ou de troisième espèce, l'homographie H est une homologie de centre A, ou une homographie axiale hyperbolique générale, ou une homographie ayant quatre points unis sommets d'un tétraèdre. Les points unis de H, distincts de A, doivent appartenir aux axes $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(p)}$ de l'homographie T.

Si A est un point uni de première espèce, α rencontre l'un des axes $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(p)}$ suivant un plan (plan d'homologie); si A est un point uni de seconde espèce, α rencontre un de ces axes suivant une droite et un autre suivant un point; enfin si A est un point uni de troisième espèce, α rencontre trois des axes $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(p)}$, chacun suivant un point.

3. Rapportons projectivement les surfaces du système $|F_1|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1 dimensions, S_{r_1}. Aux groupes de l'involution I_p correspondent les points d'une variété algébrique à trois dimensions Ω, image de l'involution. Nous désignerons par Φ_1 les sections hyperplanes de la variété Ω; ce sont les surfaces qui cor-

respondent aux surfaces F_1. Nous désignerons par Φ_2, Φ_3, ..., Φ_p les surfaces qui correspondent respectivement sur Ω aux surfaces F_2, F_3, ..., F_p. Les systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_p|$ sont complets.

Le système $|F_1|$ n'ayant pas pour points-base des points unis de I_p, à ceux-ci correspondent sur Ω des points isolés, points de diramation pour la correspondance $(1, p)$ existant entre Ω et V. Ces points sont d'ailleurs singuliers pour Ω et sont équivalents, au point de vue des transformations birationnelles, à certains ensembles de surfaces rationnelles infiniment petites.

Entre une surface Φ_1 et la surface F_1 homologue, existe une correspondance $(1, p)$ en général dépourvue de points de diramation. Par conséquent, si l'on désigne par p_a, $p^{(1)}$ le genre arithmétique et le genre linéaire des surfaces F, par π_a, $\pi^{(1)}$ ceux des surfaces Φ_1 on a [1]

$$p_a + 1 = p(\pi_a + 1), \qquad p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1).$$

4. Nous allons, dans ce qui suit, supposer que la variété V considérée satisfait aux conditions suivantes :

1° Elle possède une surface canonique d'ordre zéro;
2° Son irrégularité superficielle est nulle.

La première condition équivaut à supposer que tout système linéaire de surfaces tracées sur V est son propre adjoint. On a donc $|F'| = |F|$. Les adjoints successifs de $|F|$ coïncident avec ce système et toutes les surfaces pluricanoniques de V sont d'ordre zéro. Le genre géométrique et les plurigenres de V sont tous égaux à l'unité

$$(P_g = P_2 = \ldots = P_n = \ldots = 1).$$

Le genre arithmétique P_a de la variété V est donné par

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4,$$

Ω_0, Ω_1, Ω_2 étant respectivement le degré, le genre curviligne et le genre arithmétique de la surface canonique de V. En utilisant les formules de M. Severi [2] permettant de calculer ces caractères en fonction de ceux d'un système linéaire $|F|$ et de son adjoint $|F'| = |F|$,

---

(1) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1919, p. 1-16).

(2) *Fondamenti...* (*loc. cit.*).

on trouve
$$\Omega_0 = 0, \qquad \Omega_1 = 1, \qquad \Omega_2 = -1,$$

et par suite $P_a = 1$. La variété V est donc complètement régulière.

Représentons par (F, F) la courbe commune à deux surfaces de | F |. Puisque ce système est son propre adjoint, ses surfaces découpent, sur l'une d'entre elles, le système canonique | (F, F) | de celle-ci. Or, le défaut de ce système est, d'après un théorème de M. Severi [1], au plus égal à l'irrégularité superficielle de la variété V; cette irrégularité étant nulle, les surfaces F découpent, sur l'une d'entre elles, le système canonique complet.

De plus, d'après un théorème de MM. Castelnuovo et Enriques [2], si les courbes (F, F) sont irréductibles, les surfaces F sont régulières. Par conséquent, si p_a est le genre arithmétique des surfaces F, p_g leur genre géométrique, la dimension r du système | F | est égale à
$$r = p_a = p_g.$$

La variété Ω, représentant une involution appartenant à une variété V d'irrégularité superficielle nulle, est elle-même d'irrégularité superficielle nulle, car si Ω possédait des intégrales de différentielles totales de première espèce, il en serait de même de la variété V.

5. Reprenons l'examen de l'involution I_p appartenant à la variété V et observons que les courbes (F, F) sont irréductibles.

Nous supposerons que la variété Ω n'a pas tous ses genre géométrique et plurigenres nuls, c'est-à-dire qu'elle possède, soit une surface canonique, soit une surface pluricanonique.

Envisageons une surface F_1^* et son homologue Φ_1^*. Les systèmes linéaires de courbes
$$|(\Phi_1^*, \Phi_1)|, \quad |(\Phi_2^*, \Phi_2)|, \quad \ldots, \quad |(\Phi_1^*, \Phi_p)|$$

tracés sur cette dernière surface ont pour transformés, sur F_1^*, des courbes appartenant totalement au système canonique de cette surface. Par conséquent, d'après un théorème de M. Enriques [3], l'un de ces systèmes est le système canonique de Φ_1^*.

(1) *Fondamenti...* (*loc. cit.*).

(2) *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1906, p. 339-366).

(3) *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (*Memorie della R. Accademia di Torino*, 1893, p. 171-232).

Deux cas peuvent se présenter :

1° Le système canonique de Φ_1^* est découpé, sur cette surface, par les surfaces Φ_1. Le système $|\Phi_1|$ est alors son propre adjoint et la variété Ω possède une surface canonique et des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro. Tout système linéaire tracé sur Ω est son propre adjoint.

2° Le système canonique de Φ_1^* est découpé par l'un des systèmes $|\Phi_2|, |\Phi_3|, \ldots, |\Phi_p|$, par exemple par $|\Phi_2|$. On a donc

$$|\Phi'_1| \equiv |\Phi_2|.$$

Si p est supérieur à 2, $|\Phi_1|$ ne peut être l'adjoint de $|\Phi_2|$, car alors la variété Ω serait dépourvue de surface canonique, mais posséderait une surface bicanonique d'ordre zéro; l'adjoint de $|\Phi_3|$ serait distinct de $|\Phi_3|$ et serait l'un des systèmes $|\Phi_4|, |\Phi_5|, \ldots, |\Phi_p|$, par exemple $|\Phi_4|$. L'adjoint de $|\Phi_4|$ serait nécessairement $|\Phi_3|$.

En considérant l'adjoint de $|\Phi_5|$ et ainsi de suite, on parviendrait à cette conclusion, p étant premier et supérieur à deux, que le système $|\Phi_p|$ est nécessairement son propre adjoint, ce qui serait contradictoire.

L'adjoint de $|\Phi_2|$ doit donc être distinct de $|\Phi_1|$; supposons que ce soit $|\Phi_3|$. L'adjoint de $|\Phi_3|$ ne peut être $|\Phi_3|$ et d'autre part, si p est supérieur à trois, il ne peut coïncider avec $|\Phi_1|$, car Ω serait dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais posséderait une surface tricanonique d'ordre zéro. p n'étant pas divisible par 3, on parviendrait comme plus haut à une contradiction.

En continuant ce raisonnement, on voit que les adjoints de $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \ldots, |\Phi_p|$ sont ces systèmes rangés dans un autre ordre, cyclique, par exemple sont respectivement $|\Phi_2|, |\Phi_3|, \ldots, |\Phi_p|, |\Phi_1|$. La variété Φ est dépourvue de surfaces canonique, bicanonique, ..., $(p-1)$-canonique, mais possède une surface p-canonique d'ordre zéro. En d'autres termes, l'opération d'adjonction sur cette variété a la période p.

Si la variété Ω n'a pas tous ses genre geométrique et plurigenres nuls, l'opération d'adjonction, sur cette variété, est l'identité ou a la période p.

6. Supposons en premier lieu que l'involution I_p soit dépourvue de points unis, c'est-à-dire que l'axe $S^{(1)}$ ne rencontre pas la variété V.

Nous avons démontré que si une surface algébrique possède une involution cyclique d'ordre premier, dépourvue de points unis, le transformé du système canonique de la surface image de cette involution, est celui des systèmes composés au moyen de l'involution, compris dans le système canonique de la surface support de l'involution, qui a la dimension minimum.

Cela étant, supposons les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p$ rangés dans l'ordre non décroissant

$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \ldots \leqq r_p.$$

D'après le théorème que nous venons de rappeler, le système canonique de la surface Φ_1^* a pour transformé sur la surface F_1^* homologue, le système $|(F_1^*, F_1)|$; ce système a en effet la dimension $r_1 - 1$, inférieure aux dimensions $r_2, r_3, \ldots, r_p$ des systèmes $|(F_1^*, F_2)|$, $|(F_1^*, F_3)|, \ldots, |(F_1^*, F_p)|$. On a donc

$$|\Phi_1'| = |\Phi_1|$$

et la variété Ω possède une surface canonique d'ordre zéro. Par conséquent, on a

$$|\Phi_2'| = |\Phi_2|, \qquad |\Phi_3'| = |\Phi_3|, \qquad \ldots, \qquad |\Phi_p'| = |\Phi_p|.$$

D'après le théorème rappelé, les nombres $r_1 - 1, r_2 - 1, \ldots, r_p - 1$ sont inférieurs à tous les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p$. Par conséquent tous ces nombres doivent être égaux. On a donc

$$p(r_1 + 1) = r + 1.$$

Mais d'autre part, comme nous l'avons vu, $p_a = r$ et, pour la même raison, les surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ sont de genre arithmétique $\pi_a = r$. On retrouve donc la relation

$$p(\pi_a + 1) = p_a + 1.$$

Si l'involution I_p est privée de points unis, la variété Ω possède une surface canonique d'ordre zéro et un système linéaire de surfaces, tracé sur la variété V, invariant pour l'homographie T, possède en général p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p, ces p systèmes ayant la même dimension.

7. Supposons en second lieu que l'involution I_p possède un point uni parfait A. Nous supposerons que l'espace à trois dimensions α

tangent à la variété V au point A, rencontre l'axe $S^{(2)}$ de l'homographie T suivant un plan.

Considérons une surface F_2. Elle est découpée sur V par un hyperplan de Σ_2, ne contenant pas $S^{(2)}$ et coupant par conséquent l'espace α suivant un plan α'; le plan α' est le plan tangent en A à la surface F_2 considérée. Ce plan varie en général avec la surface F_2 et par conséquent la courbe commune à deux surfaces F_2 a en général un point simple en A.

Les ∞^2 groupes de I_p appartenant à une surface F_2 forment sur cette surface une involution ayant en A un point uni parfait, par conséquent les surfaces F_1 passant par A coupent F_2 suivant des courbes ayant un point multiple d'ordre p en A (¹). Les surfaces F_3, F_4, ..., F_p passent toutes par A et les courbes suivant lesquelles elles coupent la surface F_2 ont en A des multiplicités toutes différentes, comprises entre 2 et $p-1$ (²). Pour fixer les idées, nous supposerons que les courbes (F_2, F_3) ont en A un point double, les courbes (F_2, F_4) un point triple, ..., les courbes (F_2, F_p) un point multiple d'ordre $p-1$.

En faisant varier la surface F_2, on voit que les surfaces F_1 passant par A ont la multiplicité p en ce point, les surfaces F_3 un point double, les surfaces F_4 un point triple, ..., les surfaces F_p un point multiple d'ordre $p-1$. D'ailleurs, les hyperplans découpant sur V les surfaces F_3, F_4, ..., F_p et les surfaces F_1 passant par A, contiennent l'espace α et doivent donc avoir un point multiple en A.

Soit A' le point de diramation de la variété Ω homologue de A. Deux surfaces F_1 passant par A se coupent suivant une courbe ayant un point multiple d'ordre p^2 en A et les p^2 points de cette courbe infiniment voisins de A sont tous unis pour l'involution I_p. Par conséquent, les espaces à r_1-1 dimensions de S_{r_1} passant par A' coupent Ω suivant des courbes ayant un point multiple d'ordre p^2 en A'. Il en résulte que ce point est multiple d'ordre p^2 pour Ω. Il y a une projectivité entre les hyperplans de Σ_1 passant par A et les hyperplans de S_{r_1} passant par A', donc le cône tangent à Ω en A' est coupé par un hyperplan ne passant pas par A' suivant une surface d'ordre p^2 dont les sections hyperplanes représentent les courbes planes d'ordre p. Nous désignerons par Ψ une telle surface.

(¹) *Recherches sur les involutions douées...* (*loc. cit.*).

(²) *Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1937, p. 37-40)

Une surface Φ_2 possède en A′ un point multiple d'ordre p, le cône tangent projetant de A′ une courbe rationnelle normale d'ordre p tracée sur la surface Ψ. Une surface Φ_3 possède en A′ un point multiple d'ordre $2p$, le cône tangent projetant de A′ une courbe d'ordre $2p$ tracée sur Ψ.... Enfin une surface Φ_p possède en A′ un point multiple d'ordre $(p-1)p$, le cône tangent projetant de A′ une courbe d'ordre $p(p-1)$ tracée sur Ψ.

Envisageons une surface Φ_2 et la surface F_2 homologue. Nous avons démontré [1] qu'aux courbes canoniques de la surface Φ_2 correspondaient sur F_2 des courbes canoniques ayant la multiplicité $p-2$ en A. Ces courbes étant découpées sur F_2 par les surfaces F_{p-1}, il en résulte que le système adjoint de $|\Phi_2|$ est

$$|\Phi'_2| = |\Phi_{p-1}|.$$

Supposons tout d'abord $p=2$. L'adjoint du système $|\Phi_2|$ est le système $|\Phi_1|$ et l'adjoint de ce dernier est nécessairement $|\Phi_2|$. La variété Ω est dépourvue de surface canonique, mais possède une surface bicanonique d'ordre zéro.

Supposons maintenant $p=3$. L'adjoint de $|\Phi_2|$ est ce système lui-même et la variété Ω possède une surface canonique d'ordre zéro. Nous avons démontré récemment que ce cas ne pouvait se présenter [2].

Supposons enfin $p>3$. L'adjoint de $|\Phi_2|$ est distinct de ce système et sur la variété Ω, l'opération d'adjonction a la période p. Le système $|\Phi_1|$ ne peut être l'adjoint de l'un des systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, c'est donc l'adjoint d'un des systèmes $|\Phi_3|$, $|\Phi_4|$, ..., $|\Phi_p|$. Si nous considérons une surface Φ_i de l'un de ces systèmes ($i=3, 4, \ldots,$ ou $p-1$) et la surface F_i homologue, comme cette surface F_i possède un point multiple en A et par conséquent une courbe unie infiniment petite, dans le domaine du premier ordre de ce point, à une courbe canonique de la surface Φ_i correspond, sur la surface F_i, d'après un théorème de M. Enriques, une courbe canonique qui comprend comme partie la courbe unie infiniment petite en question, comptée $p-1$ fois. Mais cela nous montre que le système $|\Phi_1|$ ne peut être l'adjoint de $|\Phi_i|$, car les surfaces F_1 ne passent pas en général par A. On en conclut que, pour $p>3$, l'involution I_3 ne peut posséder de point uni parfait.

---

(1) *Recherches sur les involutions douées...* (*loc. cit.*).

(2) *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre...* (*loc. cit.*).

L'involution I_p ne peut posséder de points unis parfaits que pour $p=2$; dans ce cas, la variété Ω est dépourvue de surface canonique, mais possède une surface bicanonique d'ordre zéro.

8. Avant d'aller plus loin, examinons de plus près les cas d'une involution I_2 d'ordre 2. Dans ce cas, l'espace α tangent à V, en un point uni A de I_2, doit nécessairement s'appuyer suivant un plan sur le second axe $S^{(2)}$ de l'homographie T. Tous les points unis de I_2 sont donc des points unis parfaits.

Soit τ le nombre de ces points unis. Les surfaces F_2 passent simplement par ces τ points. Désignons par p_a, $p^{(1)}$ les genre arithmétique et linéaire des surfaces F, par π_2, $\pi^{(1)}$ ceux des surfaces Φ_1, par π'_a, $\pi'^{(1)}$ ceux des surfaces Φ_2. Nous avons entre ces invariants les relations (¹)

$$p_a+1=2(\pi_a+1), \qquad 4(p_a+1)=8(\pi'_a+1)-\tau,$$
$$p^{(1)}-1=2(\pi^{(1)}-1), \qquad p^{(1)}-1=2(\pi'^{(1)}-1);$$

d'où $\pi'^{(1)}=\pi^{(1)}$. D'autre part, nous avons

$$p_a=r, \qquad \pi_a=r_2+1, \qquad \pi'_a=r_1+1, \qquad r_1+r_2+2=r+1.$$

On en conclut $\tau=16$.

Une involution du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro, possède 16 *points unis.*

Un point de diramation de la variété Ω équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle infiniment petite. Désignons par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{16}$ les seize surfaces de cette sorte existant sur Ω.

A une surface F correspond sur Ω une surface Φ appartenant totalement à un système linéaire. Lorsque F varie d'une manière continue dans $|F|$ et tend vers une surface F_1, la surface Φ tend vers une surface $2\Phi_1$. Lorsque F varie de même et tend vers une surface F_2, Φ tend vers une surface

$$2\Phi_2+\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_{16}.$$

(¹) *Recherches sur les involutions douées...* (*loc. cit.*).

On en conclut

$$(1) \qquad |2\Phi_1| = |2\Phi_2 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{16}|.$$

Entre $|\Phi_1|$, son adjoint $|\Phi'_1|$, son biadjoint $|\Phi''_1|$, nous avons la relation

$$(2) \qquad |2\Phi'_1| = |\Phi''_1 + \Phi_1|.$$

Nous devons donc poser

$$\Phi'_1 = \Phi_2 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{16};$$

d'où

$$\Phi''_1 = \Phi'_2 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{16} = \Phi_1 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{16}.$$

Les relations fonctionnelles (1) et (2) sont alors identiques.

9. Appelons surface de Veronese d'indice p la surface obtenue en rapportant projectivement les courbes d'ordre p du plan aux hyperplans d'un espace linéaire à $\frac{1}{2}p(p+3)$ dimensions.

Nous avons montré plus haut que le point de diramation de la variété Ω correspondant à un point uni parfait A de I_p, était un point multiple d'ordre p^2 dont le cône tangent avait pour sections hyperplanes des surfaces de Veronese d'indice p.

On observera que pour établir cette propriété, nous n'avons pas fait usage du fait que la variété V avait une courbe canonique d'ordre zéro ni qu'elle était d'irrégularité superficielle nulle. Le résultat est donc vrai pour une variété algébrique quelconque.

Si une involution d'ordre premier p, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, possède un point uni parfait isolé, on peut construire une variété image de cette involution pour laquelle le point de diramation correspondant a la multiplicité p^2, le cône tangent en ce point ayant pour sections hyperplanes des surfaces de Veronese d'indice p.

10. Nous allons maintenant étudier le cas où l'involution I_p possède un point uni de seconde espèce.

Supposons que l'espace à trois dimensions, α, tangent à la variété V au point uni A, s'appuie suivant une droite a_2 sur l'axe $S^{(2)}$ et suivant un point A_3 sur l'axe $S^{(3)}$ de l'homographie T.

Les surfaces F_2, découpées par les hyperplans de Σ_2, ne contenant donc pas $S^{(3)}$, ont un point simple en A, le plan tangent α_2 en ce point passant par la droite AA_3 et coupant le plan $A a_2$ suivant une droite. Les groupes de I_3 appartenant à une surface F_2 forment une involution ayant un point uni non parfait en A, les points unis de I_p infiniment voisins de A étant situés l'un sur la droite AA_3, l'autre sur la droite commune aux plans α_2 et $A a_2$.

Deux surfaces F_2 ont en commun une courbe ayant un point simple en A, la tangente en ce point étant la droite AA_3.

Les surfaces F_3, découpées sur V par les hyperplans de Σ_3, ne contenant donc pas $S^{(3)}$, ont un point simple en A, le plan tangent étant le plan $A a_2$. Les ∞^2 groupes de I_p appartenant à une surface F_3 forment une involution ayant un point uni parfait en A. Les surfaces F_1 passant par A coupent donc les surfaces F_3 suivant des courbes ayant un point multiple d'ordre p en A. Les surfaces F_2 coupent les surfaces F_3 suivant des courbes ayant un point simple en A.

Aux courbes canoniques d'une surface Φ_3 correspondent, sur la surface homologue F_3, des courbes canoniques ayant un point multiple d'ordre $p-2$ en A.

Les surfaces F_4, F_5, ..., F_p sont découpées sur V par des hyperplans contenant l'espace α et ces surfaces ont par suite un point au moins double en A.

Considérons un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par A, deux hyperplans de Σ_2 ne coupant pas le plan $A a_2$ suivant une même droite, et un hyperplan de Σ_3 ne contenant pas la droite AA_3. Ces quatre hyperplans ont en commun un espace S_{r-4} ne rencontrant pas l'espace α et qui est d'autre part uni pour l'homographie T. Projetons les surfaces F à partir de cet espace S_{r-4} sur l'espace α; nous obtenons un système de surfaces F' (non linéaire), transformé en lui-même par l'homographie H induite par T dans l'espace α. Ce système comprend p systèmes de surfaces transformées en elles-mêmes par H; ce sont les surfaces F'_1, F'_2, ..., F'_p respectivement projections des surfaces F_1, F_2, ..., F_p. Les surfaces F' appartiennent à un système linéaire $|F'|$ comprenant p systèmes linéaires $|F'_1|$, $|F'_2|$, ..., $|F'_p|$ composés au moyen de l'involution I'_p d'ordre p engendrés par l'homographie H dans l'espace α.

Les surfaces F_1, F_2, ..., F_p auront le même comportement au point A que les surfaces F'_1, F'_2, ..., F'_p et celles-ci auront à leur tour le même comportement que les surfaces d'ordre p de α, unies pour l'homographie H. C'est de ces surfaces que nous allons tout d'abord nous occuper.

11. Dans l'espace α, l'homographie H est, comme nous l'avons observé, une homographie axiale hyperbolique générale dont A est un point uni isolé ; elle peut toujours être représentée par les équations

$$\text{(H)} \qquad \frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{\varepsilon x_1} = \frac{x'_2}{\varepsilon x_2} = \frac{x'_3}{\varepsilon^\alpha x_3},$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et un entier compris entre 1 et p. Le point A coïncide avec le point (1, 0, 0, 0), la droite a_2 avec la droite $x_1 = x_2 = 0$ et le point A_3 avec le point (0, 0, 0, 1).

Considérons les systèmes linéaires de surfaces d'ordre p composés au moyen de l'involution I'_p engendrée par H. Posons

$$p = \lambda\alpha + h (h < \alpha)$$

et représentons par $\varphi_i(x_1, x_2)$ une forme algébrique de degré i, à coefficients variables.

L'un des systèmes considérés est dépourvu de points-base et est formé des surfaces dont l'équation peut s'écrire

$$(1) \qquad \sum x_0^{i(\alpha-1)-(k-1)p} x_3^i \varphi_{kp-i\alpha}(x_1, x_2) = 0,$$

où i et k sont des entiers positifs ou nuls satisfaisant aux inégalités

$$i(\alpha - 1) - (k - 1)p \geqq 0, \qquad kp - i\alpha \geqq 0.$$

Deux des systèmes sont formés de surfaces ayant des points simples en A et ayant pour équations

$$(2) \qquad \sum x_0^{i(\alpha-1)-(k-1)p-1} x_3^i \varphi_{kp-i\alpha+1}(x_1, x_2) = 0,$$

où

$$i(\alpha - 1) - (k - 1)p - 1 \geqq 0, \qquad kp - i\alpha + 1 \geqq 0$$

et

$$(3) \qquad \sum x_0^{i(\alpha-1)-(k-1)p-\alpha} x_3^i \varphi_{kp-\alpha(i-1)}(x_1, x_2) = 0,$$

où

$$i(\alpha - 1) - (k - 1)p - \alpha \geqq 0, \; kp - \alpha(i - 1) \geqq 0.$$

Les $p - 3$ autres systèmes sont formés de surfaces ayant la multiplicité 2 au moins en A. Le terme contenant x_0 à la puissance la plus élevée dans l'équation d'une de ces surfaces est de la forme

$$x_0^{p-i-k} x_3^i \varphi_k(x_1, x_2), \qquad i + k \geqq 2.$$

Le plan tangent en A aux surfaces (2) est variable, le terme de degré le plus élevé en x_0 dans cette équation étant $x_0^{n-1}\varphi_1(x, x)$. Par conséquent, ces surfaces se comportent en A comme les surfaces F_2.

Le plan tangent en A aux surfaces (3) est fixe, le terme de degré le plus élevé en x_0 dans cette équation étant $x_0^{n-1}x_3$. Par suite, les surfaces (3) et les surfaces F_3 ont le même comportement en A.

Les surfaces (1) passant par A se comportent comme les surfaces F_1 passant par A.

12. Supposons que la variété Ω ait une surface canonique d'ordre zéro, c'est-à-dire que chacun des systèmes $|\Phi_1|\,|\Phi_2|, \ldots, |\Phi_p|$ soit son propre adjoint.

L'involution déterminée par I_p sur une surface F_3 ayant un point uni parfait en A, les surfaces Φ_3 ont un point multiple d'ordre p, à cône tangent rationnel, au point de diramation correspondant A'. Sur une surface Φ_3, un tel point est équivalent à une courbe rationnelle de degré $-p$ et cette courbe est rencontrée en $p-2$ points par les courbes canoniques de la surface. Il en résulte que deux surfaces F_3 doivent se rencontrer suivant une courbe ayant un point multiple d'ordre $p-2$ en A, ou encore que deux surfaces (3) se rencontrent suivant une courbe ayant cette multiplicité en A.

Considérons la section d'une surface (3) par le plan $x_2 = \mu x_1$ et projetons cette section du point (0,1,0,0) sur le plan $x_2=0$, ce qui revient à remplacer x_2 par μx_1 dans l'équation (3). Nous obtenons la courbe

$$\sum x_0^{i(\alpha-1)-(k-1)p-\alpha}\, x_3^i x_1^{kp-\alpha(i-1)}\, \varphi_{kp-\alpha(i-1)}(1, \mu) = 0.$$

Pour analyser la singularité de cette courbe au point A, opérons $\beta - 1$ fois de suite la transformation quadratique

$$x_0 : x_1 : x_3 = z_0^2 : z_0 z_1 : z_1 z_3,$$

c'est-à-dire la transformation

$$x_0 : x_1 : x_3 = z_0^\beta : z_0^{\beta-1} z_1 : z_1^{\beta-1} z_3.$$

Nous obtenons ainsi la courbe

$$\sum z_0^{\beta(p-i)-kp+\alpha(i-1)}\, z_1^{kp-\alpha(i-1)+(\beta-1)i}\, z_3^i\, \varphi_{kp-\alpha(i-1)}(1, \mu) = 0.$$

Pour une valeur déterminée de k et pour $\beta < \alpha$, les exposants de z_0 croissent avec i; pour $\alpha = \beta$, ils sont égaux. D'autre part, la valeur maximum de i pour une valeur de k est $i = k(\lambda + 1)$ et pour $\beta \leqq \alpha$, les valeurs correspondantes des exposants de z_0 décroissent quand k croît. Cela étant, faisons $\beta = \alpha$ dans l'équation précédente et divisons les deux membres $z_1^{\alpha-1}$. Dans l'équation obtenue, les termes de degré le plus élevé en z_0 sont

$$z_0^{\alpha(p-1)}[z_1 \varphi_\alpha(1, \mu) + z_3 \varphi_0];$$

ils correspondent aux valeurs $k = 0$, $i = 0$ et 1.

D'autre part, à l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_3 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_3$$

correspond l'homographie

$$z'_0 : z'_1 : z'_3 = z_0 : \varepsilon z_1 : \varepsilon z_3.$$

Par conséquent, sur la courbe section d'une surface (3) par le plan $x_2 = \mu x_1$, il existe $\alpha - 1$ points simples infiniment voisins successifs de A, dont le dernier est uni parfait pour l'involution I'_p engendrée par H dans l'espace α.

Rapportons projectivement les surfaces (3) aux hyperplans d'un espace linéaire ayant le même nombre de dimensions que le système (3); aux groupes de I'_p correspondent les points d'une variété Ω' et au point A une surface tracée sur cette variété. Posons

$$\rho X_{ikj} = x_0^{i(\alpha-1)-(k-1)p-\alpha} x_3^i x_2^{kp-\alpha(i-1)j} x_3^j.$$

D'après ce qui précède, la surface qui correspond au point A sur Ω' sera située dans l'espace $S_{\alpha+1}$ donné par

$$X_{ikj} = 0 \qquad (k > 0).$$

Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$X_{00j} = X_j, \qquad X_{100} = X_{\alpha+1}.$$

Au point uni parfait infiniment voisin de A situé sur la section de la surface (3) par le plan $x_2 = \mu x_1$ correspond dans $S_{\alpha+1}$ la droite d'équations

$$X_1 = \mu X_0, \qquad X_2 = \mu X_1, \qquad \ldots, \qquad X_\alpha = \mu X_{\alpha-1}.$$

Le lieu de cette droite, lorsque μ varie, est la surface

$$\left\|\begin{matrix} X_0 & X_1 & \dots & X_{\alpha-1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_\alpha \end{matrix}\right\| = 0.$$

Au domaine du point A dans le plan $x_3 = 0$ correspond donc sur la variété Ω' une surface d'ordre α. Par conséquent, deux surfaces (3) ont en commun une courbe ayant un point multiple d'ordre α en A. Il en est de même de deux surfaces F_3 et par conséquent, on doit avoir $\alpha = p - 2$. Par suite, $p \geqq 5$.

De ce qui précède, retenons que sur une surface F_3, les domaines des premier, second, ..., $(p-3)$ — ième ordres du point A sont formés de points unis pour I_p, les points du domaine d'ordre $p - 3$ étant unis parfaits pour cette involution. Deux surfaces F_3 ont un contact d'ordre $p - 3$ en A.

13. Nous allons rechercher la singularité de la variété Ω au point A'. D'après ce qui précède, cette singularité sera de la même nature que la singularité de la variété image de l'involution I'_p de α, obtenue en rapportant projectivement les surfaces (1) aux hyperplans d'un espace linéaire ayant le même nombre de dimensions que le système (1).

Observons que l'équation des surfaces (1) passant par le point A peut s'écrire sous la forme

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{2\nu} x_0^{p-3i} x_3^i \varphi_{2i}(x_1, x_2) + \sum_{i=0}^{\nu-1} x_0^{3i+2} x_3^{4\nu-i} \varphi_{2(\nu-i)-1}(x_1, x_2) + \varphi_p(x_1, x_2) + x_3^p = 0$$

si $p = 6\nu + 1$, et sous la forme

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{2\nu+1} x_0^{p-3i} x_3^i \varphi_{2i}(x_1, x_2) + \sum_{i=0}^{\nu} x_0^{3i+1} x_3^{4\nu+3-i} \varphi_{2(\nu-i)+1}(x_1, x_2) + \varphi_p(x_1, x_2) + x_3^p = 0$$

si $p = 6\nu + 5$.

Ces surfaces possèdent un point triple en A, le cône tangent étant

$$x_3\varphi_2(x_1, x_2) = 0.$$

Coupons la surface (4) par le plan $x_2 = \mu x_1$. La section est une courbe ayant un point triple en A, une des tangentes en ce point appartenant au plan $x_3 = 0$, les deux autres étant confondues avec la droite $x_1 = x_2 = 0$.

Rapportons projectivement les surfaces (4) aux hyperplans d'un espace linéaire ayant le même nombre de dimensions que le système (4). A cet effet, posons

$$\rho X_{ikjl} = x_0^i\, x_3^k\, x_1^j\, x_2^l.$$

Nous obtenons, en éliminant les x, les équations d'une variété image de I'_p sur laquelle, aux points infiniment voisins de A, correspondent les points d'une surface. Celle-ci appartient à un espace S_{p+6}, à $p+6$ dimensions, dont les coordonnées ponctuelles seront

$$X_{p-3,1,2-j,j} = X_j, \qquad X_{0,0p-j,j} = X'_j, \qquad X_{3\nu-1,3\nu+1,1-j,j} = X''_j, \qquad X_{0p00} = X.$$

Après avoir posé dans l'équation (4), $x_2 = \mu x_1$, opérons la transformation

$$x_0 : x_1 : x_3 = z_0^{p-2} : z_0^{p-3} z_1 : z_1^{p-3} z_3,$$

de manière à mettre en évidence, comme plus haut, le point uni parfait qui termine la suite des $p-3$ points infiniment voisins successifs de A situés sur la branche de la courbe considérée tangente en A au plan $x_3 = 0$. On constate ainsi qu'au domaine de ce point correspond sur la variété image de I'_p la droite d'équations

$$X_1 = \mu X_0, \qquad X_2 = \mu X_1, \qquad X'_1 = \mu X'_0,$$
$$X'_2, = \mu X'_1, \qquad \ldots, \qquad X'_p = \mu X'_{p-1}, \qquad X''_0 = X''_1 = X = 0,$$

située dans l'espace S_{p+6}. Le lieu de cette droite lorsque μ varie est la surface V_2^{p+2} d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & X'_0 & X'_1 & \ldots & X'_{p-1} \\ X_1 & X_2 & X'_1 & X'_2 & \ldots & X'_p \end{matrix} \right\| = 0, \qquad X''_0 = X''_1 = X = 0.$$

Elle représente les points du domaine du $(p-2)$ — ième ordre du point A sur les surfaces (3).

Opérons maintenant la transformation

$$x_0 : x_1 : x_3 = z_0^{3\nu} : z_0^{3\nu-1} z_1 : z_1^{3\nu-1} z_3.$$

On constate aisément qu'au point A sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles, dont le premier est sur la droite $x_1 = x_2 = 0$ et dont le dernier est uni parfait pour I'_p. Aux points infiniment voisins de ce dernier point correspondent, sur la variété image de I'_p, les points de la conique

$$X_1 = \mu X_0, \qquad X_2 = \mu X_1,$$
$$X''_1 = \mu X''_0, \qquad X''^2_0 - XX_0 = 0, \qquad X'_0 = X'_1 = \ldots = X'_p = 0.$$

Le lieu de cette conique lorsque μ varie est la surface V_2^4 d'équations

$$\begin{Vmatrix} X_0 & X_1 & X''_0 \\ X_1 & X_2 & X''_1 \end{Vmatrix} = 0, \qquad X''^2_0 - XX_0 = 0, \qquad X'_0 = X'_1 = \ldots = X'_p = 0,$$

appartenant à S_{p+6}.

Les surfaces V_2^{p+3}, V_2^4 ont en commun la conique

$$X_0 X_2 - X_1^2 = 0, \qquad X'_0 = X'_1 = \ldots = X'_p = 0, \qquad X''_0 = X''_1 = 0, \qquad X = 0.$$

De tout ceci on conclut que le point A′ est multiple d'ordre $p+6$ pour la variété Ω'. Le cône tangent à cette variété en ce point se compose d'un cône d'ordre $p+2$ et d'un cône d'ordre quatre, ayant en commun un cône du second ordre.

On arrive aux mêmes conclusions en partant des surfaces (5), le raisonnement étant le même.

On voit de plus qu'au point A′, les surfaces Φ_2 possèdent un point triple dont le cône tangent est formé d'un plan, appartenant au cône d'ordre $p+2$, et d'un cône du second ordre, appartenant au cône du quatrième ordre. Ce plan et ce cône se rencontrent suivant une droite.

Sur une surface Φ_2, le domaine du point A′ est donc équivalent à l'ensemble d'une droite et d'une conique se rencontrant en un point. Il est aisé de voir que la droite est de degré -2 et la conique de degré -3. Par conséquent, les courbes canoniques d'une surface Φ_2 ne rencontrent pas la droite, mais rencontrent la conique en un point. Il en résulte que deux surfaces F_2 doivent avoir en commun une courbe ayant un point simple en A, la tangente en ce point à cette courbe étant la droite AA_3 (ou $x_1 = x_2 = 0$). C'est bien ce qui a lieu comme nous l'avons fait remarquer plus haut.

Si la variété image de l'involution I_p possède une surface canonique d'ordre zéro et si l'involution possède un point uni de seconde espèce, l'ordre de l'involution est au moins égal à cinq. Dans le voisinage du point uni se trouvent :

a. Un élément de surface sur lequel les domaines d'ordre un, deux, ..., $p-3$ du point uni sont formés de points unis, les points du domaine d'ordre $p-3$ étant unis parfaits.

b. Un élément de courbe, non tangent à l'élément de surface précédent, sur lequel se trouve une suite de $\frac{1}{2}(p-3)$ points unis dont le dernier est uni parfait.

14. Supposons maintenant que sur la variété Ω, l'opération d'adjonction ait la période p. Le système $|\Phi_1|$ est l'adjoint de l'un des systèmes $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$, ..., $|\Phi_p|$, par exemple de $|\Phi_i|$ $(i \geqq 2)$. Comme les surfaces Φ_1 ne passent par aucun des points de diramation de Ω, les surfaces Φ_i doivent avoir en ces points des singularités sans influence sur leurs courbes canoniques, c'est-à-dire des points doubles non tacnodaux (ces points de diramation sont, comme on sait, nécessairement singuliers pour les surfaces Φ_i).

Comme nous l'avons vu, les surfaces F_3 ont un point uni parfait en A, par conséquent les surfaces Φ_3 ont un point multiple d'ordre p équivalent à une courbe rationnelle de degré $-p$, rencontrée en $p-2$ points par les courbes canoniques de ces surfaces. Il en résulte que les surfaces Φ_3 ne peuvent avoir comme adjointes les surfaces Φ_1.

Nous avons observé plus haut que les surfaces F_4, F_5, ..., F_p ont en A un point double au moins. D'autre part, les surfaces F_1 passant par A ont la multiplicité deux au moins en ce point, puisqu'elles sont découpées sur V par des hyperplans contenant l'espace tangent α. Il en résulte que les surfaces Φ_4, Φ_5, ..., Φ_p ont en A' un point de multiplicité supérieure à deux. Par conséquent, les courbes canoniques de ces surfaces passent par A' et elles ne peuvent avoir comme adjointes les surfaces Φ_1.

De tout ceci, il résulte que les surfaces Φ_1 doivent être les adjointes des surfaces Φ_2 et que celles-ci ne peuvent avoir en A' une multiplicité supérieure à deux. Mais alors, comme nous l'avons établi [1]:

[1] *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 1931, p. 1131-1150).

les surfaces Φ_2 ont en A' des points doubles biplanaires auxquels sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Les surfaces F_1 passant par A coupent une surface F_2 suivant des courbes ayant un point double à tangentes fixes en A. L'une de ces tangentes coïncide avec la droite AA_3, l'autre est située dans le plan Aa_2. Sur chacune des branches d'une telle courbe, il existe $p-2$ points infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution, le dernier point de chaque suite étant uni parfait.

Dans le cas actuel, pour l'homographie H de l'espace α, on a $\alpha = p - 1$.

Si, sur une variété image de l'involution I_p, *l'opération d'adjonction a la période p et si l'involution possède un point uni de seconde espèce, dans le voisinage de ce point se trouvent :*

a. Un élément de surface sur lequel les domaines d'ordre un, deux, ..., $p-2$ du point considéré sont formés de points unis, les points du domaine d'ordre $p-2$ étant unis parfaits.

b. Un élément de courbe, non tangent à l'élément de surface précédent, sur lequel se trouve une suite de $p-2$ points unis dont le dernier est uni parfait.

Nous avons montré (1) que le cas $p = 3$ se présente effectivement.

LUCIEN GODEAUX.

---

(1) *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre...* (*loc. cit.*)

SUR LA DÉMONSTRATION

DE

L'HYPOTHÈSE DE GOLDBACH

POUR LES NOMBRES IMPAIRS

DONNÉE PAR M. VINOGRADOW

Par M. J. G. van der CORPUT.

Le célèbre problème dit de Goldbach vous est sans doute connu à vous tous. En 1742, dans sa correspondance avec Euler, ce mathématicien a prétendu que chaque nombre pair est la somme de deux nombres premiers, par exemple

$$2 = 1 + 1, \qquad 4 = 2 + 2, \qquad 6 = 3 + 3, \qquad 8 = 3 + 5, \qquad \ldots.$$

Du temps d'Euler le nombre 1 était considéré comme nombre premier. A présent on ne considère plus en général le nombre 1 comme nombre premier, de sorte que de nos jours nous formulons l'hypothèse de Goldbach comme suit : tout nombre pair > 2 est la somme de deux nombres premiers.

Beaucoup de mathématiciens éminents se sont efforcés de donner la solution de ce problème, mais, malgré cela, cette hypothèse dans la phase de la science où nous sommes à présent, n'est ni démontrée ni réfutée. Comme vous le savez, M. Schnirelmann a, il y a quelques années, attiré sur lui l'attention en démontrant qu'il y a une constante absolue M telle que tout nombre naturel soit la somme de M nombres premiers tout au plus.

Pour les nombres impairs l'hypothèse de Goldbach peut être formulée ainsi : tout nombre impair supérieur à 5 est la somme de trois nombres premiers. Il va sans dire que dans le problème des nombres pairs se présentent beaucoup plus de difficultés que dans celui des nombres impairs.

Je me réjouis, Mesdames et Messieurs, que devant cet illustre auditoire il m'est donné de pouvoir vous présenter ce que nous devons depuis quelques semaines au génie de M. Vinogradow [1].

Le grand mathématicien qu'est M. Vinogradow nous a démontré d'une manière ingénieuse et pourtant élémentaire que tout nombre impair suffisamment grand est la somme de trois nombres premiers, c'est-à-dire qu'il existe une certaine borne telle que tout entier impair supérieur à cette borne puisse être écrit comme la somme de trois nombres premiers.

Mon intention est de vous donner ici en grands traits la solution trouvée par M. Vinogradow. Les démonstrations de ce savant russe se caractérisent par un génie extraordinaire, mais cependant il donne ses raisonnements de manière si concise qu'il exige beaucoup d'efforts de ceux qui s'intéressent à son œuvre, des efforts tels, que même des initiés il exige force travail pour se mettre à la hauteur des raisonnements [2]. Ce qu'il y a de curieux dans la démonstration en question, c'est qu'elle peut être dite élémentaire, du moins si l'on accepte le théorème de Siegel-Walfisz concernant la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques [3].

Considérons une progression arithmétique

$$k, \quad k+q, \quad k+2q, \quad \ldots,$$

où k et q désignent des nombres naturels, premiers entre eux, tels que $k \leqq q$. La théorie classique nous apprend que pour tout entier $x \geqq 2$ le nombre des nombres premiers $\leqq x$ figurant dans cette progression arithmétique est approximativement égal à

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{g=2}^{x} \frac{1}{\log g},$$

(1) *Representation of an odd number as a sum of three primes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, 15, 1937, n^{os} 6-7, p. 169-172).

(2) Après cette conférence une démonstration plus ample et claire de M. Vinogradow a paru : *Some theorems concerning the theory of primes* [*Recueil mathématique*, 2, 1937, (44), n° 2, p. 179-195].

(3) *Acta Arithmetica*, 1; *Mathematische Zeitschrift*, 40, 1936.

et que la différence est en valeur absolue inférieure à $c_1 x(\log x)^{-m}$, où m est un nombre quelconque et c_1 un nombre dépendant uniquement de m et de q; partout dans cette conférence $\varphi(q)$ désigne la fonction d'Euler. Du résultat concernant les zéros des séries L de Dirichlet, résultat trouvé par M. Siegel, il résulte immédiatement, comme M. Walfisz l'a fait remarquer, que le nombre c_1 peut être choisi même indépendamment de q; par conséquent c_1 dépend uniquement de m. Dans cette conférence je désignerai par c_1, c_2, c_3 et c_4 des nombres positifs, convenablement choisis, dépendant uniquement de m.

Je distingue dans le raisonnement de M. Vinogradow trois phases. D'abord la phase classique, c'est-à-dire celle où l'on se sert des moyens fournis par MM. Hardy, Littlewood, Landau et d'autres; dans cette phase le théorème de Siegel-Walfisz est indispensable. La dernière est purement Vinogradowienne; cette phase trouve son appui dans la pensée fondamentale qui est à la base de toutes les recherches de M. Vinogradow pendant les dernières années et avec l'aide de laquelle lui, et entre autres son élève M. Tschudakow, ont déjà trouvé des résultats si remarquables dans la théorie des nombres premiers, dans la théorie des approximations diophantiques, dans celles des points à coordonnées entières et dans le problème de Waring.

La dernière phase fournit pour ainsi dire le trait d'union entre les deux autres, un trait d'union qui nous permet de traiter à l'aide de la pensée fondamentale de M. Vinogradow les expressions auxquelles aboutit la méthode classique, appliquée au problème de Goldbach pour les nombres impairs.

Permettez-moi de commencer par la première phase. A nous incombe la tâche de démontrer que tout nombre impair suffisamment grand est la somme de trois nombres premiers. Quand une charge nous semble trop lourde, nous la remplaçons souvent par une tâche bien plus lourde encore, dans l'espoir que cette tâche nouvelle nous sera plus légère. C'est le cas ici. Le développement de la théorie des nombres pendant les dernières dizaines d'années nous a appris que le problème devient plus facile, si on le rend plus difficile de la manière suivante : on demande le nombre approximatif des manières différentes dont un entier impair suffisamment grand peut être écrit comme la somme de trois nombres premiers. Le nouvel énoncé nous permet de traiter le problème d'une manière analytique, ce qui n'est pas le cas pour le premier énoncé.

Qu'il me soit maintenant permis de vous annoncer sans trop tarder ce que M. Vinogradow a démontré : le nombre des manières différentes dont un nombre impair peut être écrit comme la somme de trois nombres premiers, est égal à

$$(1) \qquad I(N) = (1+\varepsilon)\frac{N^2 K\, P(N)}{2(\log N)^3},$$

où K est le produit

$$(2) \qquad K = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right),$$

étendu à tous les nombres premiers (K est donc une constante absolue) et où P(N) est le produit

$$(3) \qquad P(N) = \prod_{p/N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right),$$

étendu à tous les facteurs premiers p de N; ε est un nombre, dépendant de N et tendant vers zéro, si N croît indéfiniment. Par conséquent, pour les nombres N qui sont impairs et suffisamment grands, ε est supérieur à -1 et I(N) est donc positif, de sorte que N est la la somme de trois nombres premiers.

Qu'est-ce que la méthode classique nous apprend par rapport au nombre I(N)? Comme c'est évident, ce nombre est égal à

$$(4) \qquad \int_0^1 S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha,$$

où

$$S(\alpha) = \sum_{p \leqq N} e^{2\pi i \alpha p}.$$

Si α est égal à une fraction à petit dénominateur, $S(\alpha)$ peut avoir le même ordre de grandeur que $\sum_{g=2}^{N} \frac{1}{\log g}$, par exemple

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{p \leqq N} e^{\frac{2\pi i p}{3}} = 1 + e^{\frac{2\pi i}{3}} \sum_{\substack{p \leqq N \\ p \equiv 1 \pmod 3}} 1 + e^{\frac{4\pi i}{3}} \sum_{\substack{p \leqq N \\ p \equiv 2 \pmod 3}} 1,$$

est, d'après le théorème principal concernant la distribution des nombres premiers, approximativement égal à

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}+e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)\sum_{g=2}^{N}\frac{1}{\log g}=-\frac{1}{2}\sum_{g=2}^{N}\frac{1}{\log g},$$

tandis que la valeur absolue de la différence est inférieure à $c_2 N(\log N)^{-m}$. On trouve de la même façon pour $S\left(\frac{a}{q}\right)$, où $\frac{a}{q}$ désigne une fraction irréductible quelconque, la valeur approximative

$$\frac{1}{\varphi(q)}\left(\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e^{\frac{2\pi i a}{q}}\right)\sum_{g=2}^{N}\frac{1}{\log g},$$

tandis que l'écart est inférieur à $c_3 q N(\log N)^{-m}$; je désigne par (a, q) le plus grand commun diviseur de a et q, de sorte que $\sum\limits_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}$ est étendu à tous les nombres naturels $a \leqq q$, qui sont premiers avec q. Comme on le sait, $\sum\limits_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}$ est égal à la fonction $\mu(q)$ de Möbius; cette fonction est zéro, si q est divisible par un carré >1; si, par contre, q n'est pas divisible par un carré >1, elle est égale à $+1$ ou -1, selon que le nombre des facteurs premiers de q est pair ou impair. Ainsi nous obtenons le résultat que $S\left(\frac{a}{q}\right)$ est approximativement égal à

$$\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{g=2}^{N}\frac{1}{\log g},$$

et que la différence est en valeur absolue inférieure à $c_3 q N(\log N)^{-m}$. Moyennant la sommation partielle nous trouvons maintenant pour $S(\alpha)$ la valeur approximative

$$\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\mathcal{Y}\left(\alpha-\frac{a}{q}\right) \qquad \text{où} \quad \mathcal{Y}(\beta)=\sum_{g=2}^{N}\frac{e^{2\pi i\beta g}}{\log g},$$

tandis que l'écart est inférieur à

$$c_4 q \mathrm{N}(\log \mathrm{N})^{-m}\left(1+\mathrm{N}\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\right).$$

Ce résultat n'est utilisable que lorsque q et $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|$ ne sont pas trop grands. Introduisons un nombre quelconque fixe $h \geqq 4$ et supposons

$$(5) \qquad \left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \leqq \mathrm{N}^{-1}(\log \mathrm{N})^{3h} \qquad \text{et} \qquad 0<q \leqq (\log \mathrm{N})^{h}.$$

Si à un nombre réel α correspond une fraction irréductible $\frac{a}{q}$ qui satisfait à (5), je dirai que α est situé dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur; cette notion dépend donc du choix des nombres N et h.

Dans le voisinage d'une fraction irréductible $\frac{a}{q}$ à petit dénominateur la valeur approximative de $\mathrm{S}(\alpha)$ est, d'après le résultat précédent $\left(\text{où je pose } m=\frac{19}{2}h\right)$, égal à $\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\mathcal{Y}\left(\alpha-\frac{a}{q}\right)$, tandis que l'écart est inférieur à $\gamma_1 \mathrm{N}(\log \mathrm{N})^{-\frac{11}{2}h}$; je désigne par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{12}$ des nombres positifs convenablement choisis, dépendant uniquement de h. Dans le voisinage sus-indiqué $\mathrm{S}^3(\alpha)$ est donc approximativement égal à $\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\mathcal{Y}^3\left(\alpha-\frac{a}{q}\right)$ et l'écart inférieur à $\gamma_2 \mathrm{N}^3(\log \mathrm{N})^{-\frac{11}{2}h}$.

Dans la première phase de notre raisonnement nous considérons la contribution à (4) des α situés dans le voisinage d'une fraction $\frac{a}{q}$ à petit dénominateur. Comme nous venons de le voir, cette contribution est approximativement égale à

$$(6) \qquad \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i \frac{a}{q}\mathrm{N}} \int_{-\mathrm{N}^{-1}(\log \mathrm{N})^{3h}}^{\mathrm{N}^{-1}(\log \mathrm{N})^{3h}} \mathcal{Y}^3(\beta)\, e^{-2\pi i\beta \mathrm{N}}\, d\beta$$

et la différence absolue inférieure à $2\gamma_2 \mathrm{N}^2(\log \mathrm{N})^{-\frac{5}{2}h}$.

L'identité

$$\begin{aligned}(1-e^{2\pi i\beta})\,\mathcal{Y}(\beta) \\ = -\frac{e^{2\pi i\beta(\mathrm{N}+1)}}{\log \mathrm{N}}+\frac{e^{4\pi i\beta}}{\log 2}-\sum_{g=3}^{\mathrm{N}} e^{2\pi i\beta g}\left(\frac{1}{\log(g-1)}-\frac{1}{\log g}\right)\end{aligned}$$

nous apprend pour tout nombre positif $\beta \leqq \frac{1}{2}$

$$2 \sin \pi\beta \, | \mathcal{Y}(\beta) | \leqq \frac{1}{\log N} + \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log N} = \frac{2}{\log 2},$$

donc

$$| \mathcal{Y}(\beta) | \leqq \frac{1}{(\log 2) \sin \pi\beta} \leqq \frac{1}{2\beta \log 2} < \frac{1}{\beta},$$

d'où suit

$$\int_{N^{-1}(\log N)^{3h}}^{\frac{1}{2}} | \mathcal{Y}(\beta) |^2 \, d\beta < \int_{N^{-1}(\log N)^{3h}}^{\infty} \frac{d\beta}{\beta^2} = \frac{1}{2} N^2 (\log N)^{-6h}.$$

L'inégalité analogue vaut pour l'intégrale, dont l'intervalle d'intégration est $\left(-\frac{1}{2}, -N^{-1} (\log N)^{3h} \right)$.

Par conséquent, l'intégrale figurant dans (6) est approximativement égale à

$$(7) \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}^3(\beta) e^{-2\pi i \beta N} \, d\beta,$$

et l'écart inférieur à $N^2 (\log N)^{-6h}$.

Or, (7) est égal à

$$\sum_{g_1=2}^{N} \sum_{g_2=2}^{N} \sum_{g_3=2}^{N} \frac{1}{(\log g_1)(\log g_2)(\log g_3)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \beta (g_1+g_2+g_3-N)} \, d\beta = \mathcal{G}(N),$$

où

$$\mathcal{G}(N) = \sum_{\substack{g_1=2 \\ g_1+g_2+g_3=N}}^{N} \sum_{g_2=2}^{N} \sum_{g_3=2}^{N} \frac{1}{(\log g_1)(\log g_2)(\log g_3)}.$$

Ainsi nous trouvons que la contribution à (4) des α situés dans le voisinage d'une fraction $\frac{a}{q}$ à petit dénominateur est à peu près

$$\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} \mathcal{G}(N),$$

et que l'écart est inférieur à $\gamma_3 N^2 (\log N)^{-\frac{5}{2} h}$.

Le nombre des fractions à petit dénominateur, situées dans l'intervalle $0 \leqq \alpha < 1$, est tout au plus $(\log N)^{2h}$. La contribution approximative à (4) des α situés dans le voisinage d'au moins une fraction à petit dénominateur est donc

$$\mathcal{G}(N) \sum_{1 \leqq q \leqq (\log N)^h} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}$$

et l'écart inférieur à $\gamma_3 N^2 (\log N)^{-\frac{1}{2}h}$.

En vertu de

$$\mathcal{G}(N) \leqq N^2 \qquad \text{et} \qquad \varphi(q) \geqq \frac{1}{2} q^{\frac{3}{4}},$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(N) \sum_{q > (\log N)^h} \frac{1}{\varphi^2(q)} &\leqq 4N^2 \sum_{q > (\log N)^h} q^{-\frac{3}{2}} \\ &< 4N^2 \left\{ (\log N)^{-\frac{3}{2}h} + \int_{(\log N)^h}^{\infty} u^{-\frac{3}{2}} du \right\} \\ &< 12 N^2 (\log N)^{-\frac{1}{2}h}; \end{aligned}$$

d'où il résulte que la contribution approximative à (4) des α situés dans le voisinage d'au moins une fraction à petit dénominateur est égale à

$$\mathcal{G}(N) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}, \tag{8}$$

et que l'écart est inférieur à $\gamma_4 N^2 (\log N)^{-\frac{1}{2}h}$. Comme on le sait [1] (8) est pour tout nombre impair N égal à $\mathcal{G}(N)\,K P(N)$, où K et P(N) sont définis par (2) et (3).

Voilà le résultat de la première phase de notre raisonnement. Mais, c'est maintenant seulement que commencent les difficultés, car il faut encore démontrer que les α qui ne sont pas situés dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur ne fournissent pas une trop grande contribution. Afin d'atteindre ce but, il suffit de démontrer que tout α

---

(1) Comparez, par exemple, E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, S. Hirzel (Leipzig), 1927, vol. 1, p. 210; proposition 247.

qui n'est pas situé dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur satisfait à l'inégalité

$$(9) \qquad |S(\alpha)| < \gamma_5 N(\log N)^{-\frac{1}{2}h}.$$

En effet, la contribution à (4) de tous ces α est alors tout au plus

$$\begin{aligned}
&\gamma_5 N(\log N)^{-\frac{1}{2}h} \int_0^1 |S(\alpha)|^2 \, d\alpha \\
&\quad = \gamma_5 N(\log N)^{-\frac{1}{2}h} \sum_{p \leqq N} \sum_{p' \leqq N} \int_0^1 e^{2\pi i\alpha(p-p')} \, d\alpha \\
&\quad = \gamma_5 N(\log N)^{-\frac{1}{2}h} \sum_{p \leqq N} \sum_{\substack{p' \leqq N \\ p = p'}} 1 \\
&\quad \leqq \gamma_5 N^2 (\log N)^{-\frac{1}{2}h}.
\end{aligned}$$

Par conséquent (9) entraîne le résultat que $I(N) - \mathcal{G}(N) KP(N)$ est en valeur absolue inférieur à $\gamma_6 N^2(\log N)^{-\frac{1}{2}h}$. Ce résultat dans lequel h désigne un nombre $\geqq 4$, est même considérablement meilleur que la relation (1), qui en suit immédiatement, parce que

$$\mathcal{G}(N) : \frac{N^2}{2(\log N)^3}$$

tend vers 1, si N croît indéfiniment.

Il n'est pas possible d'appliquer directement la pensée fondamentale de M. Vinogradow à la somme $S(\alpha)$, ce qui rend nécessaire la deuxième phase dans laquelle nous mettons cette somme sous une forme plus convenable.

En examinant les α situés dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur, il suffit, comme nous l'avons vu, de faire usage de la régularité de la distribution des nombres premiers, régularité exprimée par le théorème de Siegel-Walfisz.

D'autre part, cette régularité ne nous suffit pas, si nous voulons déduire une borne supérieure de $|S(\alpha)|$ pour un nombre α qui n'est pas situé dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur. Maintenant, il faut caractériser les nombres premiers par une autre propriété. Il est remarquable que M. Vinogradow se serve d'une propriété négative, savoir la suivante : si l'on supprime dans la suite des nombres naturels les nombres composés, on retient les nombres premiers (crible d'Eratosthène). Cette propriété conduit à l'identité

$$(10) \qquad e^{2\pi i\alpha} + \sum_{\sqrt{N}<p\leqq N} e^{2\pi i\alpha p} = \sum{}' \mu(d) e^{2\pi i\alpha m d},$$

où Σ' est étendu à tous les nombres naturels $m \leqq N$ et à tous les nombres naturels $d \leqq \frac{N}{m}$ dont chaque facteur premier est $\leqq \sqrt{N}$. Le nombre des nombres premiers $\leqq \sqrt{N}$ étant moins grand que $\sqrt{N}$, donc d'un ordre de grandeur beaucoup moins élevé que $N(\log N)^{-\frac{1}{2}h}$, il suffit de démontrer que le membre de droite de (10) possède pour les α en question un ordre de grandeur tout au plus égal à $N(\log)^{-\frac{1}{2}h}$. Nous pouvons même démontrer que ce membre possède pour tout α qui n'est pas situé dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur un ordre de grandeur tout au plus égal à $N(\log N)^{2-h}$, ce qui est meilleur en vertu de $h \geqq 4$.

Des considérations élémentaires nous fournissent les deux résultats suivants : la contribution absolue au membre de droite de (10) des termes tels que $d \leqq N(\log N)^{-h}$ est inférieure à $\gamma_7 N(\log N)^{2-h}$; le nombre des termes ayant la propriété que $d > N(\log N)^{-h}$ et que chaque facteur premier de d soit $\leqq (\log N)^{3h}$ est inférieur à $\gamma_8 N(\log N)^{2-h}$. Il suffit donc de considérer les termes dans lesquels d est supérieur à $N(\log N)^{-h}$ et possède au moins un facteur premier $> (\log N)^{3h}$. Désignons par T_+ la somme de ces termes, possédant en outre la propriété $\mu(d) = +1$, et par T_- la somme de ces termes, possédant en outre la propriété $\mu(d) = -1$.

Nous pouvons donc nous contenter de démontrer que T_+ et T_- sont en valeurs absolues inférieurs à $\gamma_9 N(\log N)^{2-h}$. Traitons T_+ (on peut traiter T_- d'une manière analogue). Si nous désignons par T_k la somme des termes de T_+ tels que d possède k facteurs premiers $> (\log N)^{3h}$, on a

$$T_+ = \sum_k T_k,$$

où k parcourt un système formé de nombres naturels $< \log N$. En outre on a

$$T_k = \sum_{1\leqq m<(\log N)^h} T_k(m) \qquad \text{où} \qquad T_k(m) = \sum_d{}'' e^{2\pi i\alpha m d};$$

$\sum_d''$ est étendu aux nombres naturels d jouissant des propriétés suivantes :

$N(\log N)^{-h} < d \leqq N m^{-1} \qquad \mu(d) = 1$;
chaque facteur premier de d est $\leqq \sqrt{N}$;
d possède k facteurs premiers $> (\log N)^{3h}$.

Comme il est aisé de voir, $kT_k(m)$ possède la valeur approximative

$$\mathfrak{U} = \sum_x \sum_y e^{2\pi i \alpha m x y},$$

de telle façon que l'écart est inférieur à $\gamma_{10} N m^{-1} (\log N)^{-3h}$; $\sum_x$ est étendu aux nombres premiers $x > (\log N)^{3h}$ et $\leqq \sqrt{N}$, tandis que $\sum_y$ est étendu aux nombres naturels y jouissant des propriétés suivantes :

$N(\log N)^{-h} < xy \leqq N m^{-1}; \qquad \mu(y) = -1$;
chaque facteur premier de y est $\leqq \sqrt{N}$;
y possède $k-1$ facteurs premiers $> (\log N)^{3h}$.

Nous serons prêts dès que nous aurons démontré

$$(11) \qquad |\mathfrak{U}| < \gamma_{11} N m^{-\frac{1}{2}} (\log N)^{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}h}.$$

Nous obtenons alors en effet

$$k|T_k| < \gamma_{12} N (\log N)^{\frac{3}{2} - h},$$

donc,

$$|T_+| < \gamma_9 N (\log N)^{2-h}.$$

La deuxième phase du raisonnement nous apprend par conséquent qu'il suffit de déduire l'inégalité (11). La dernière phase est consacrée à l'étude de la somme $\mathfrak{U}$; à cette somme peut être appliquée l'idée fondamentale de M. Vinogradow. On peut même appliquer cette idée à la somme plus générale

$$\mathfrak{U} = \sum_{\substack{x \text{ dans } \mathfrak{X} \\ (x,y) \text{ dans } E}} \sum_{y \text{ dans } \mathfrak{Y}} e^{2\pi i \beta x y};$$

l'entier x parcourt un ensemble $\mathfrak{X}$ (indépendant de y) et l'entier y parcourt un ensemble $\mathfrak{Y}$ (indépendant de x), mais seules les paires x, y entrent en considération, telles que le point (x, y) appartienne à un ensemble donné E. Supposons que toute paire de points ayant la même ordonnée et appartenant à E, possède la propriété que E contient tous les points à coordonnées entières situées entre ces deux points. Dans le problème de Goldbach pour les nombres impairs E est l'ensemble des points (x, y) à coordonnées entières tels que

$$\mathrm{N}(\log \mathrm{N})^{-h} < xy \leqq \mathrm{N}\, m^{-1}.$$

Si l'on désigne par j le plus petit intervalle contenant $\mathfrak{X}$, on a

$$|\mathfrak{U}| \leqq \sum_{x \text{ dans } j} \left| \sum_{\substack{y \text{ dans } \mathfrak{Y} \\ (x, y) \text{ dans E.}}} e^{2\pi i\beta xy} \right|.$$

$\mathfrak{Z}$ désignant le nombre des entiers appartenant à j, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous apprend donc

$$\begin{aligned} |\mathfrak{U}|^2 &\leqq \mathfrak{Z} \sum_{x \text{ dans } j} \left| \sum_{\substack{y \text{ dans } \mathfrak{Y} \\ (x, y) \text{ dans E}}} e^{2\pi i\beta xy} \right|^2 \\ &= \mathfrak{Z} \sum_{\substack{x \text{ dans } j \\ (x, y) \text{ et } (x, y') \text{ dans E}}} \sum_{y \text{ dans } \mathfrak{Y}} \sum_{y' \text{ dans } \mathfrak{Y}} e^{2\pi i\beta x(y-y')} \\ &= \mathfrak{Z} \sum_{y \text{ dans } \mathfrak{Y}} \sum_{y' \text{ dans } \mathfrak{Y}} \sum_{x}{}''' e^{2\pi i\beta x(y-y')}; \end{aligned}$$

$\sum_{x}'''$ est étendu à toutes les valeurs entières x appartenant à j, telles que (x, y) et (x, y') appartiennent à E, de sorte que x parcourt un système de nombres entiers consécutifs. $\sum_{x}'''$ étant la somme d'une progression arithmétique, peut être mis sous une forme simple, de sorte qu'on trouve ainsi une borne supérieure pour la valeur absolue de $\mathfrak{U}$. L'application de cette idée nous fournit en effet l'inégalité demandée (11).

Dans ce que je viens de vous dire, j'ai tâché de vous exposer en grands traits la méthode ingénieuse et pourtant élémentaire de notre grand savant. Ce qui n'est pas encore démontré, c'est cette question-ci : est-ce que l'hypothèse de Goldbach est vraie ou non pour les nombres pairs ? Du résultat de M. Vinogradow il suit immédiatement que tout nombre pair suffisamment grand Q est la somme de quatre nombres premiers, car $Q - 3$ est alors impair.

Nous devons savoir gré à l'éminent mathématicien russe de nous avoir fourni une méthode par laquelle il a non seulement pu résoudre l'hypothèse de Goldbach pour les nombres impairs, mais qui nous fournit également une grande perspective pour des découvertes futures.

Et maintenant, Mesdames et Messieurs, finissant ma tâche devant vous, une tâche qui m'a été rendue bien facile vu votre attention et votre honorable présence, il ne me reste qu'à vous remercier de tout cœur de votre bienveillance et à témoigner ma gratitude à la Société mathématique de France pour l'invitation flatteuse qu'elle m'a fait parvenir.

J. G. VAN DER CORPUT
(Groningue).

LA TRIGONOMÉTRIE
DES
PETITS TRIANGLES CURVILIGNES
SUR UNE SURFACE

Par M. LEVI-CIVITA.

Les premières notions de trigonométrie plane et sphérique remontent aux Babyloniens. La science hellénique les rattacha au théorème des transversales de Ménélas; des apports substantiels ont été ensuite fournis par les Indiens, par les Persans et par les Arabes, un de ces derniers, Nasir Ad-Din, ayant même fait paraître au treizième siècle un traité de trigonométrie pure, c'est-à-dire non mélangé à l'astronomie, tout en étant naturellement influencé par les besoins de celle-ci.

La Renaissance compléta la déduction des relations (dont trois seulement sont indépendantes) entre les six éléments (angles et côtés) d'un triangle, en leur donnant des formes très variées, pouvant convenir aux différents cas posés par la pratique. Il faut toutefois arriver jusqu'à Euler pour que les formules trigonométriques prennent la forme compacte actuelle : auparavant, faute d'avoir défini les fonctions trigonométriques d'une manière systématique pour toutes les valeurs réelles de leurs arguments, on était obligé à distinguer un tas de cas et de sous-cas.

Une grande généralisation de la trigonométrie, au point de vue théorique, fut conçue par Gauss, qui aborda l'étude des triangles géodésiques, c'est-à-dire formés par des arcs de lignes géodésiques, sur une surface quelconque. Dans ce cadre rentrent les recherches de Christoffel, Weingarten, Darboux (1) et de M. Severi (2).

(1) *Voir* notamment DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 3 (Paris, Gauthier-Villars, 1894), Livre VI, Chap. VIII.

(2) *Sulla curvatura delle superficie e varietà* (*Rend. del Circolo Mat. di Palermo*, t. 42, 1917, p. 227-259).

Je me propose maintenant une extension ultérieure, en envisageant, au lieu de triangles géodésiques, des triangles formés par des arcs de courbes quelconques, sur une surface également quelconque. Toutefois, pour obtenir des résultats relativement simples, il convient de se borner à des triangles *petits*.

Mais, tout d'abord, qu'est-ce que c'est qu'un triangle *petit?* S'il s'agit de triangles rectilignes (en géométrie euclidienne) la petitesse n'a pas de sens intrinsèque, mais dépend du choix de l'unité de mesure : on peut toujours, par un choix convenable, représenter les longueurs des côtés par des nombres aussi petits que l'on veut. Le critère vulgaire de petitesse ressort ici nécessairement de quelque élément additionnel, qui peut dépendre des circonstances les plus variées. Mais, si les côtés sont curvilignes, il y a un repère naturel : c'est la courbure. En indiquant, pour fixer les idées, par Γ le maximum de ladite courbure (pour les différents points des trois côtés) et par L la longueur maximum des côtés, le produit

$$\Gamma L$$

est un nombre pur, et il est parfaitement justifié d'appeler petits les triangles pour lesquels le produit ΓL reste au-dessous d'une certaine fraction propre qu'on puisse traiter comme une quantité de premier ordre.

Dès lors la question se pose d'établir, comme en trigonométrie ordinaire, des relations entre les longueurs des côtés et les angles. En général, si les courbes sont quelconques, on ne pourrait s'attendre qu'à des relations fonctionnelles; mais il en est tout autrement si l'on pense qu'en ayant recours à des développements tayloriens, on peut faire état de la petitesse du triangle, c'est-à-dire de la circonstance qu'il y a lieu de supposer négligeable (vis-à-vis de l'unité) toute quantité d'ordre non inférieur à 1, ou à 2, ou à 3, etc.

En restant dans les généralités, il convient de remarquer tout de suite qu'on pourrait fort bien envisager ces triangles curvilignes comme étant immergés directement dans l'espace ambiant (espace ordinaire, ou plus généralement riemannien à un nombre quelconque de dimensions), mais il convient de commencer par le cas, qui est sans doute le plus intéressant au point de vue géodésique, ou même topographique, où l'on suppose le triangle tracé sur une surface σ donnée : plan, sphère, ellipsoïde, etc.

Il existe donc au préalable cette surface σ, et alors il y a (sauf pour le plan) un autre élément, la courbure totale K de la surface, dont on doit aussi tenir compte pour apprécier la petitesse d'un triangle. Ici encore il y a un nombre pur dépendant des dimensions du triangle par rapport à celles de la surface : c'est le produit $\mathbf{K}L^2$, $\mathbf{K}$ désignant le maximum de K à l'intérieur du triangle. Nous admettrons que, ΓL fournissant l'étalon du premier ordre, $\mathbf{K}L^2$ soit du second, c'est-à-dire comparable à $(\Gamma L)^2$.

Dans ce qui suit nous nous occuperons d'abord (n° 1) des petits triangles d'arcs de cercle dans le plan, en nous bornant à la première approximation, c'est-à-dire en négligeant le second ordre. Cette introduction élémentaire donne une première orientation à la recherche analogue, dans le cas général d'une surface quelconque et d'un triangle à côtés curvilignes également quelconques, lorsqu'on se propose de tenir compte aussi des termes de second ordre (en négligeant seulement le troisième). On s'aperçoit aisément que, pour passer à des courbes quelconques et à des approximations ultérieures, il y a lieu de s'appuyer sur les représentations canoniques des courbes au voisinage d'un de leurs points, d'où l'opportunité de rappeler leur déduction (n° 2), et de s'en procurer l'extension au cas de courbes appartenant à une surface donnée.

Ceci exige pas mal de préparation : dérivation intrinsèque et formules de Frenet; coordonnées convenables pour une petite région; et leurs expressions paramétriques (n° 3) pour une courbe donnée. On étudie ensuite le triangle des cordes géodésiques (n° 4), par lequel on se trouve ramené, en seconde approximation, à la trigonométrie sphérique (ordinaire ou lobatchewskienne) (n° 5). Il n'y a alors qu'à se servir des développements des numéros précédents pour obtenir, au même ordre d'approximation la trigonométrie des triangles curvilignes (n° 6).

Les formules de première approximation avaient été établies par moi-même en 1934 [1], comme corollaire, assez éloigné, d'une recherche géométrique de plus longue haleine concernant les relations mutuelles de trois familles de courbes tracées sur une surface. Ensuite, le regretté Cohn-Vossen a montré [2] qu'on peut obtenir le même résultat par des considérations élémentaires directes.

---

(1) *Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria*, Compositio Mathematica, Vol. I, 1934, p. 115-162. *Voir* aussi A. TONOLO, *Il teorema dei seni per i triangoli infinitesimi tracciati sopra una superficie*, *ibid.*, Vol. II, 1935, p. 424-437.

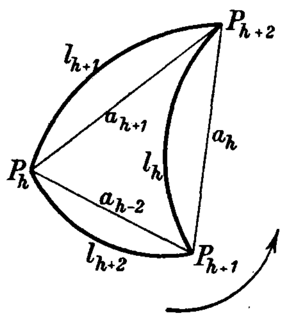
(2) *Der approximative Sinussatz für kleine Dreiecke auf krummen Flächen*, *ibid.*, Vol. III, 1936, p. 52-54.

J'y étais parvenu pour mon compte (sans toutefois publier la remarque) dans la manière qui sera exposée ici au n° **1**, et qui découle d'ailleurs de la même idée à laquelle s'était inspiré Cohn-Vossen. Le passage au second ordre (éventuellement à des ordres plus élevés; *cf.*, n° **8**) se fait au contraire, comme on l'a dit, par voie analytique admettant un traitement systématique.

J'ajouterai, pour être complet, que le numéro 7 de ce Mémoire contient une petite remarque se rapportant au théorème de Legendre sur la résolution des triangles sphériques.

1. Petits triangles plans formés par trois arcs de cercles. — Soit P_h, P_{h+1}, P_{h+2} un tel triangle (*fig.* 1) avec la convention évi-

Fig. 1.



dente de regarder coïncidents les indices qui diffèrent de 3 ou d'un multiple de 3.

On fixera sur le triangle comme sens positif de circulation celui qui est défini par l'ordre croissant des indices (marqué par la flèche dans la figure). Et l'on désignera par l_h la longueur du côté opposé au sommet P_h, c'est-à-dire de l'arc de cercle $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$; par a_h celle de la corde correspondante $\overline{P_{h+1}P_{h+2}}$. Si R_h est le rayon du cercle auquel appartient l'arc $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$ le rapport l_h/R_h mesure en radiants l'angle au centre correspondant. Il va sans dire que, dès qu'il s'agit de petits triangles, cet angle est également petit : en tout cas, notamment, il n'est pas douteux qu'il faut l'envisager comme un angle aigu.

J'introduirai encore la courbure avec signe γ_h, ayant $1/R_h$ pour valeur absolue, et, comme signe, $\pm$ selon que l'arc correspondant est situé à l'extérieur $\left(\text{comme } \widehat{P_h P_{h+1}},\ \widehat{P_{h+2} P_h} \text{ dans la figure 1}\right)$, ou à l'intérieur du triangle $\left(\text{comme } \widehat{P_{h+1} P_{h+2}}\right)$. L'angle aigu, en P_{h+1} ou en P_{h+2}, compris entre l'arc $\widehat{P_{h+1} P_{h+2}}$ et la corde n'est que la moitié de l'angle au centre l_h/R_h. Il convient d'attribuer un signe à cet angle en posant

$$(1.1) \qquad 2\beta_h = l_h \gamma_h \qquad (h = 1, 2, 3).$$

La valeur absolue $|\beta_h|$ est ainsi précisément l'angle aigu entre l'arc et sa corde; et, d'après la définition de γ_h, le signe de β_h est $\pm$ selon que le côté $\widehat{P_{h+1} P_{h+2}}$ est situé à l'extérieur (comme dans la figure 1) ou à l'intérieur du triangle rectiligne des cordes.

Il est aisé d'exprimer à la fois les côtés a_h et les angles α_h du triangle rectiligne des cordes, en fonction des éléments l_h, φ_h du triangle circulaire et des courbures γ_h. En portant ces expressions dans les formules élémentaires de la trigonométrie rectiligne, on en tire autant de relations entre les l, les φ et les γ, qui, dûment simplifiés d'après la petitesse des arcs l_h (vis-à-vis des rayons respectifs), seront précisément les relations trigonométriques, se rapportant aux triangles circulaires, que nous nous proposons d'établir.

Ceci en thèse générale. Passant à l'exécution, il y a tout d'abord à exprimer les angles φ_h moyennant les α_h et les auxiliaires β_h.

Si, comme en P_h, dans la figure 2, les arcs de cercle tournent tous les deux leur concavité vers l'intérieur du triangle rectiligne $P_h P_{h+1} P_{h+2}$, β_{h+1} et β_{h+2}, ils sont tous les deux positifs, d'après (1.1), et l'on a évidemment

$$(1.2) \qquad \varphi_h = \alpha_h + \beta_{h+1} + \beta_{h+2}.$$

Cette formule subsiste en tout cas. En effet, si un des côtés circulaires aboutissant à P_h est (au voisinage de ce point) intérieur au triangle rectiligne, le β correspondant devient négatif, d'après (1.1), et c'est justement ce signe qu'on doit attribuer à l'angle dans l'expression (1.2) de φ_h.

Quant à la corde a_h sous-tendante à l'arc l_h, on a

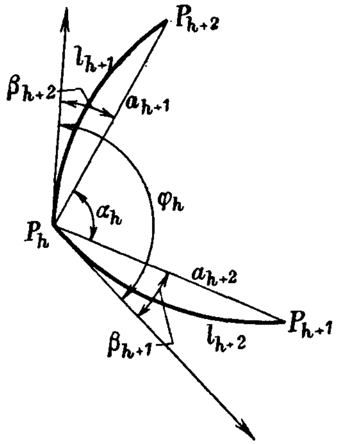
$$a_h = 2 R_h \sin \frac{1}{2} \frac{l_h}{R_h}.$$

En y remplaçant $1/R_h$ par $\pm \gamma_h$, l'ambiguïté du signe disparaît en tout cas, et l'on peut retenir

$$a_h = \frac{2}{\gamma_h} \sin \frac{1}{2} l_h \gamma_h \qquad (h = 1, 2, 3). \tag{1.3}$$

Envisageons maintenant une quelconque des formules de la trigonométrie ordinaire. C'est une relation entre les a et les α. Tout se

Fig. 2.



réduit à y remplacer les a_h par leurs valeurs (1.3), et les α_h par leurs valeurs tirées de (1.2); c'est-à-dire ayant égard aux (1.1), par

$$\alpha_h = \varphi_h - \frac{1}{2}(l_{h+1}\gamma_{h+1} + l_{h+2}\gamma_{h+2}). \tag{1.4}$$

Si (et c'est notre cas) on se contente de la première approximation (par rapport aux produits $l_h \gamma_h$), on pourra négliger au cours du calcul tout terme du second ordre vis-à-vis de l'unité, et les résultats sont très simples.

Explicitons à titre d'exemple la formule des sinus

$$\frac{a_h}{\sin \alpha_h} = l \qquad (h = 1, 2, 3), \tag{1.5}$$

où l, indépendante de h, désigne une petite quantité de l'ordre des dimensions du triangle (diamètre du cercle circonscrit).

Tout d'abord, en négligeant justement les termes du second ordre vis-à-vis de l'unité, on peut confondre le sinus avec l'arc et l'on tire par conséquent de (1.3), qu'il est permis d'écrire

$$a_h = l_h(1 + (2)), \tag{1.6}$$

les symboles (1), (2),... indiquant un ensemble de termes d'ordre 1, 2,..., au moins par rapport à nos arguments $l_h \gamma_h$.

Au même ordre d'approximation on a uniquement à remplacer dans (1.5) les a_h et α_h par leur valeur (1.6) et (1.4).

En tenant compte pour un moment, seulement des termes finis dans α_h, on tire de (1.6)

$$l_h = l \{ \sin\varphi_h + (1) \}. \tag{1.7}$$

On a ensuite, en développant $\sin\alpha_h$ d'après (1.4), et en mettant en évidence seulement le premier ordre,

$$\sin\alpha_h = \sin\varphi_h - \frac{1}{2} l(\gamma_{h+1} \sin\varphi_{h+1} + \gamma_{h+2} \sin\varphi_{h+2}) \cos\varphi_h + (2).$$

Dans les termes du premier ordre on peut remplacer l_{h+1} et l_{h+2} par leurs valeurs (1.7), et il en résulte

$$\begin{aligned} \sin\alpha_h = \sin\varphi_h &- \frac{1}{2} l(\gamma_h \sin\varphi_h + \gamma_{h+1} \sin\varphi_{h+1} + \gamma_{h+2} \sin\varphi_{h+2}) \cos\varphi_h \\ &+ \frac{1}{2} l\gamma_h \sin\varphi_h \cos\varphi_h + (2). \end{aligned} \tag{1.8}$$

En introduisant, pour abréger l'écriture, la courbure triangulaire τ, c'est-à-dire le trinome τ,

$$\tau = \frac{1}{3}(\gamma_h \sin\varphi_h + \gamma_{h+1} \sin\varphi_{h+1} + \gamma_{h+2} \sin\varphi_{h+2}), \tag{1.9}$$

on tire de (1.5), (1.6) et (1.8) les formules [1]

$$\frac{l_h}{\sin\varphi_h} = l \left\{ 1 + \frac{1}{2} l(\gamma_h \cos\varphi_h - 3\tau \cot\varphi_h) + (2) \right\} \qquad (h = 1, 2, 3) \tag{1.10}$$

qu'il s'agissait d'établir.

---

[1] Dans les relations (10′) et (14), données au Chap. III de mon Mémoire cité, il y a apparemment un changement de signe à l'égard des binomes

$$\gamma_h \cos\varphi_h - 3\tau \cot\varphi_h.$$

Ceci provient de la circonstance que les angles désignés alors par ψ_h ne coïncident pas avec les φ_h actuels, mais avec leurs suppléments $\pi - \varphi_h$ (angles extérieurs du triangle).

On y voit, bien mise en évidence, la correction due aux courbures des côtés, qui affecte la relation de simple proportionnalité, valable pour le triangle rectiligne. Dans (1.10) figure l'auxilliaire l, qui est d'après (1.5) le diamètre du cercle circonscrit au triangle (des cordes), c'est-à-dire (sans faire intervenir les cordes) passant par les trois sommets P_h.

Pour avoir un ensemble de trois relations indépendantes entre les côtés l_h et les angles φ_h du triangle curviligne, il suffira de se procurer une expression de l (en fonction de l_h, φ_h) distincte des (1.10) elles-mêmes. On y parvient très rapidement en partant de l'expression bien connue de l en fonction des côtés a_h du triangle rectiligne et remplaçant ensuite chaque a_h par sa valeur (1.3), ce qui reviendra, d'après (1.6) (en négligeant encore ici le second ordre), à écrire matériellement l_h au lieu de a_h.

Pour le triangle des cordes on a, quel que soit h,

$$l = \frac{a_h}{\sin\alpha_h} = \frac{a_h a_{h+1} a_{h+2}}{a_{h+1} a_{h+2} \sin\alpha_h}.$$

Le dénominateur est le double de l'aire du triangle, c'est-à-dire

$$2\sqrt{p(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)},$$

où

$$p = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) \tag{1.11}$$

désigne le semi-périmètre.

En introduisant les rapports

$$\frac{a_h}{p} = \mu_h \qquad (h = 1,\ 2,\ 3),$$

qui (puisque chaque côté est plus petit que la somme des deux autres) sont des *fractions propres*, on peut écrire

$$l = \frac{1}{2} p \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\sqrt{(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)}}. \tag{1.12}$$

D'après (1.6) la définition (1.11) de p prend la forme

$$p = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3)\{1 + (2)\}. \tag{1.13}$$

C'est comme dire que, toujours en négligeant le second ordre devant l'unité, *p est le semi-périmètre du triangle curviligne donné;* de même que, d'après (**1**.6),

$$\frac{a_h}{p} = \frac{l_h}{p}\left\{1 + (2)\right\},$$

de sorte que

$$\mu_h = \frac{l_h}{p}\left\{1 + (2)\right\}. \tag{1.14}$$

En définitive *l'équation à associer au théorème des sinus* (**1**.10), *pour le triangle curviligne plan est* (**1**.12), *où* en première approximation (la même adoptée jusqu'ici) *on peut rapporter p et les μ_h au triangle donné, p* semi-périmètre et $\mu_h = l_h/p$, de sorte que

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2. \tag{1.15}$$

Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que, comme troisième équation à associer aux (**1**.8) (où l'on envisage l comme une auxiliaire indéterminée), on peut employer

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi,$$

qui est une identité goniométrique pour un triangle rectiligne, mais devient, d'après les (**1**.4), une véritable relation entre les éléments du triangle curviligne envisagé.

On pourrait remanier d'une manière analogue, pour les triangles d'arcs de cercle, les autres formules de la trigonométrie rectiligne ordinaire. Qu'il me soit permis de signaler cette petite tâche de beau vieux style à ceux qui aiment d'aller jusqu'au bout.

2. Représentation locale des courbes planes. — Une courbe plane C étant donnée, soient Q un point quelconque de la courbe, s son abscisse curviligne comptée à partir d'un autre point P fixé d'avance, la courbe étant régulière entre P et Q. Si x, y désignent des coordonnées cartésiennes de Q, les fonctions

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \tag{2.1}$$

qui définissent la courbe C sous forme paramétrique, seront supposées continues avec toutes les dérivées qu'il y aura lieu de considérer le long de l'arc PQ (extrémités incluses). Au même sens sont des fonctions régulières de s les vecteurs unitaires $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$, le premier dirigé suivant la tangente à C en Q (dans le sens positif des s) et le second suivant la normale dans un tel sens que le couple $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ soit orienté comme les directions positives des axes coordonnées x, y.

On a alors classiquement pour tout point Q

$$\frac{dQ}{ds} = \mathbf{t} \tag{2.2}$$

avec les formules de Frenet

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \gamma\mathbf{n}, \tag{2.3}$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\gamma\mathbf{t}, \tag{2.4}$$

où γ désigne la courbure de C *avec signe*, et précisément avec le signe $+$, si $\mathbf{n}$ est dirigé vers la concavité des C, avec le signe — dans le cas contraire [1].

En dérivant (2.3) par rapport à s, et en remplaçant $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ par sa valeur (2.4), on tire

$$\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2} = -\gamma^2\mathbf{t} + \dot{\gamma}\mathbf{n}, \tag{2.5}$$

où le point superposé est une notation abrégée pour $\frac{d}{ds}$.

En appliquant au point $Q(s)$ le développement de Maclaurin, on a

$$Q(s) = P + s\mathbf{t} + \frac{1}{2}s^2\gamma\mathbf{n} + \frac{1}{6}s^3(-\gamma^2\mathbf{t} + \dot{\gamma}\mathbf{n}) + \ldots, \tag{2.6}$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur au troisième par rapport à s. Bien entendu, les coefficients (vecteurs et scalaires) se rapportent tous au point P.

Un tel développement pourrait être prolongé en calculant les dérivées successives de Q, et par conséquent de $\mathbf{t}$, d'après (2.3), et en éliminant chaque fois les dérivées de $\mathbf{n}$, d'aprés (2.4) et ses dérivées.

---

(1) La convention adoptée au numéro précédent à propos de la courbure des côtés d'un triangle circulaire est parfaitement la même; le sens du couple $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ étant dans le cas du triangle fixé comme il suit :

$\mathbf{t}$, pour chaque côté, dirigé dans le sens de circulation $P_h P_{h+1} P_{h+2}$; $\mathbf{n}$ vers l'intérieur du triangle. Le sens de circulation figure à la place du sens défini par les axes coordonnées.

La formule (2.6) nous montre que, pour arriver jusqu'au terme en s^3, on a dû introduire γ et $\dot{\gamma}$. On reconnaît immédiatement, en raisonnant par récurrence, qu'en se proposant d'expliciter jusqu'au terme en s^n on serait amené à introduire les dérivées de γ (en P) jusqu'à l'ordre $n-2$. Tenons compte maintenant de la circonstance essentielle qu'on aura affaire à des arcs *petits*. En généralisant ce qui a été admis dès le début (*voir* Introduction) à l'égard du maximum Γ, de la courbure et du produit ΓL (L longueur du petit arc envisagé), nous admettrons que les produits $\dot{\gamma} L^2$, $\ddot{\gamma} L^3$, ... sont des petites quantités (nombres purs) des ordres 2, 3, ..., au moins. On constate alors que les termes successifs du développement de $Q(s)$, suivant les puissances de s, ont (un facteur s mis à part) un ordre de petitesse non inférieur à $n-1$, s'il s'agit du terme en s^n. D'après cela, on peut en particulier spécifier la formule (2.6) en écrivant

$$(2.7)\quad Q(s) = P + s\left\{\mathbf{t} + \frac{1}{2}s\gamma\mathbf{n} + \frac{1}{6}s^2(-\gamma^2\mathbf{t} + \dot{\gamma}\mathbf{n}) + ③\right\}.$$

Si l'on suppose l'origine des coordonnées au point P, on en tire la représentation canonique d'une courbe plane, au voisinage d'un de ses points [1].

On n'a qu'à projeter ladite relation vectorielle sur les axes (c'est-à-dire décomposer le second membre suivant $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$). Il vient en conformité

$$(2.8)\quad \begin{cases} x = s\left\{1 - \frac{1}{6}s^2\gamma^2 + ③\right\}, \\ y = s\left\{\frac{1}{2}s\gamma + \frac{1}{6}s^2\dot{\gamma} + ③\right\}. \end{cases}$$

③ pouvant dépendre des valeurs de γ, $\dot{\gamma}$, sur tout l'arc PQ.

3. Courbure géodésique et formules de Frenet pour une courbe tracée sur une surface.

— Sur une surface σ on peut consi-

---

(1) La déduction d'après les formules de Frenet se trouve (même pour les courbes de l'espace) à peu près dans tous les traités modernes de géométrie différentielle. *Voir*, par exemple, G. Julia, *Éléments de géométrie infinitésimale*, Paris, Gauthier-Villars (2e éd., 1936, p. 129); ou bien W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Berlin, Springer, B. I (8. Auflage, 1930, p. 26); W. C. Graustein, *Differential Geometry*, New York, Macmillan, 1935, p. 59.

dérer (comme dans le plan) une courbe C et un vecteur $\mathbf{w}$, fonction des points Q de C.

En supposant la surface rapportée à des coordonnées curvilignes quelconques x^1, x^2, soient

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2}{}_{1} a_{ik} dx^i dx^k \tag{3.1}$$

l'expression de son élément linéaire, et w^i les composantes contrevariantes du vecteur $\mathbf{w}$.

Si, en désignant par s l'arc de C, compté à partir d'un point fixe P,

$$x^1 = x^1(s), \qquad x^2 = x^2(s) \tag{3.2}$$

sont les équations paramétriques de la courbe C, le vecteur unité $\mathbf{t}$, tangent à C au point courant Q d'abscisse curviligne s, aura pour composantes contrevariantes

$$t^1 = \frac{dx^1}{ds}, \qquad t^2 = \frac{dx^2}{ds}. \tag{3.3}$$

Ceci posé, il nous faut encore rappeler [1] qu'on peut généraliser d'une manière invariante la notion de dérivée du vecteur $\mathbf{w}$ par rapport à s, le long de la courbe C en définissant ce vecteur $D\mathbf{w}$ moyennant les composantes

$$(D\mathbf{w})^i = \frac{dw^i}{ds} + \sum_{jh}^{n}{}_{i} \Gamma^i_{jh} w^j \frac{dx^h}{ds}, \tag{3.4}$$

qu'on vérifie avoir justement comportement contrevariant, dès qu'on entend par Γ^i_{jh} les symboles de Christoffel (de seconde espèce) du ds^2 envisagé.

On tire aisément de (3.4) que ce même vecteur $D\mathbf{w}$ a pour composantes covariantes

$$(D\mathbf{w})_i = \frac{dw_i}{ds} - \sum_{jh}^{2}{}_{1} \Gamma^j_{ih} w_j \frac{dx^h}{ds}. \tag{3.5}$$

Notons en passant que, si $\mathbf{w}$ est défini *non seulement sur* C, mais

---

[1] *Voir*, par exemple, mon *Absolute differential calculus* (edited by Dr E. Persico), Glasgow and London, Blackie, 1927, p. 139-140.

aussi dans un domaine à deux dimensions de σ, dans le voisinage de C, on peut introduire les dérivées partielles des w^i par rapport à x^1 et à x^2, et l'on a alors

$$\frac{dw^i}{ds}=\sum_h^{1\ldots 2}\frac{\partial w^i}{\partial x^h}\frac{dx^h}{ds},$$

ce qui permet d'écrire les composantes contrevariantes (3.4) de $\mathbf{Dw}$ sous la forme

$$(\mathbf{Dw})^i=\sum_h^{1\ldots 2}\frac{dx^h}{ds}\left\{\frac{\partial w^i}{\partial x^h}+\sum_j^{1\ldots 2}\Gamma^i_{jh}w^j\right\}$$

ou bien, la quantité entre les crochets étant par définition la dérivée covariante $w^i|_h$,

$$(\mathbf{Dw})^i=\sum_h^{1\ldots 2}w^i|_h\frac{dx^h}{ds},$$

qui laisse apercevoir le caractère contrevariant des composantes $(\mathbf{Dw})^i$. Pour le cas dont il s'agit actuellement d'un vecteur $\mathbf{w}$ défini uniquement sur C, je renvoie à mon livre cité tout à l'heure.

Si, en particulier, on fait coïncider le vecteur $\mathbf{w}$ avec $\mathbf{t}$, on sait que

$$\mathrm{D}\mathbf{t}=\frac{1}{r}\mathbf{n},$$

en désignant par $\mathbf{n}$ le vecteur superficiel normal à $\mathbf{t}$ vers la concavité de C et $\frac{1}{r}$ la courbure géodésique en valeur absolue. Si $\mathbf{v}$ désigne $\pm\mathbf{n}$ et si l'on pose en conformité

$$\gamma=\pm\frac{1}{r},$$

on a

$$\mathrm{D}\mathbf{t}=\gamma\mathbf{v}, \tag{3.6}$$

où γ est la courbure géodésique de C, *avec signe*, et précisément avec le signe + lorsque $\mathbf{v}$ est dirigé vers la concavité de C, le signe — dans le cas contraire. Le vecteur $\mathbf{v}$ jouit de la double propriété d'être unitaire et perpendiculaire à $\mathbf{t}$. D'après la métrique de la surface σ, ceci se traduit dans les deux formules

$$\sum_{1}^{2}{}_{i}\, \nu^i \nu_i = 1, \qquad \sum_{1}^{2}{}_{i}\, \nu^i t_i = 0,$$

ν_i et t_i désignant évidemment des composantes covariantes.

En dérivant la première équation par rapport à s, il vient

$$\sum_{1}^{2}{}_{i} \left(\frac{d\nu^i}{ds} \nu_i + \frac{d\nu_i}{ds} \nu^i \right) = 0.$$

Si l'on y remplace, d'après (3.4), $\dfrac{d\nu^i}{ds}$ par

$$(\mathrm{D}\boldsymbol{\nu})^i - \sum_{1}^{2}{}_{jh}\, \Gamma^i_{jh} \nu^j \frac{dx^h}{dt},$$

et $\dfrac{d\nu_i}{ds}$, d'après (3.5), par

$$(\mathrm{D}\boldsymbol{\nu})_i + \sum_{1}^{2}{}_{jh}\, \Gamma^j_{ih} \nu_j \frac{dx^h}{ds},$$

on trouve après réduction

$$\sum_{1}^{2}{}_{i} [(\mathrm{D}\boldsymbol{\nu})^i \nu_i + (\mathrm{D}\boldsymbol{\nu})_i \nu^i] = 0.$$

Les deux sommes sont égales, chacune d'elles représentant le produit scalaire de $\mathrm{D}\boldsymbol{\nu}$ et $\boldsymbol{\nu}$, d'après la métrique (3.1). Ce produit est donc nul, ce qui nous assure que le vecteur $\mathrm{D}\boldsymbol{\nu}$ est perpendiculaire à ν (sur σ) et a par conséquent la même direction, sinon le même sens, de $\mathbf{t}$.

On peut donc poser

$$\mathrm{D}\nu = -\gamma^* \mathbf{t}, \tag{3.7}$$

γ^* représentant un facteur scalaire encore indéterminé. Pour le fixer on n'a qu'à dériver par rapport à s la relation d'orthogonalité

$$\sum_{1}^{2}{}_{i}\, \nu^i t_i = 0$$

et remplacer, comme tout à l'heure, les dérivées $\frac{d\nu^i}{ds}$ et $\frac{dt_i}{ds}$ par leurs valeurs tirées de (3.4) et (3.5). On a ainsi

$$\sum_i^{1,2} [(\mathbf{D}\boldsymbol{\nu})^i t_i + (\mathbf{Dt})_i \nu^i] = 0.$$

Or (3.6), en prenant les composantes covariantes, équivaut à

$$(\mathbf{Dt})_i = \gamma \nu_i.$$

De même (3.7), en prenant les composantes contrevariantes, donne

$$(\mathbf{D}\boldsymbol{\nu})^i = -\gamma^* t^i.$$

L'égalité provenant de la dérivation devient partant (puisque $\mathbf{t}$ et $\boldsymbol{\nu}$ ont tous les deux longueurs 1)

$$-\gamma^* + \gamma = 0.$$

L'expression de $\mathbf{D}\boldsymbol{\nu}$ acquiert en définitive la forme

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\nu} = -\gamma \mathbf{t}, \tag{3.8}$$

qui n'est pas autre chose que la seconde formule de Frenet pour les courbes de σ, la première étant (3.6) (¹).

En revenant aux composantes covariantes, d'après (3.4) $\left(\text{où l'on pose } \mathbf{w} = \mathbf{t}, \text{ et l'on écrit } t^i \text{ au lieu de } \frac{dx^i}{ds}\right)$, les deux formules de Frenet (3.6) et (3.8) s'explicitent sous la forme

$$\frac{dt^i}{ds} = \gamma \nu^i - \sum_{jh}^{1,2} \Gamma^i_{jh} t^j t^h, \tag{3.9}$$

$$\frac{d\nu^i}{ds} = -\gamma t^i - \sum_{jh}^{1,2} \Gamma^i_{jh} \nu^j t^h \qquad (i = 1, 2). \tag{3.10}$$

(¹) On aurait pu se passer de la vérification directe en se rapportant au cas général d'une variété riemannienne à un nombre quelconque n de dimensions. L'extension des formules de Frenet a été signalée par BLASCHKE [*Frenet's Formeln für den Raum von Riemann* (*Math. Zeitschrift*, B. 6, 1920, p. 94-99)] et a fait ensuite l'objet d'un grand nombre de publications. *Voir* notamment L. P. EISENHART, *Riemannian geometry*, Princeton University Press, 1927, p. 103-107.

Pour simplifier, il convient de se rapporter à des coordonnées x^1, x^2 isothermes, c'est-à-dire telles que ds^2 se réduit à la forme

$$ds^2 = \lambda(dx^{1^2} + dx^{2^2}). \tag{3.11}$$

Il convient en outre de supposer qu'on a justement affaire à la forme canonique (¹) relative au point P, origine des arcs s. Alors, au voisinage, soit du premier ou du second ordre, de P, tout se passe comme si λ avait la forme

$$\frac{1}{1 + \frac{K}{4}(x^{1^2} + x^{2^2})^2},$$

les coordonnées x^1, x^2 s'annulant au point P, et K désignant la courbure totale de la surface σ en ce point. Si l'on adopte les notations évidentes

$$\lambda_i = \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}, \qquad \lambda_{ik} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^i\,\partial x^k} \qquad (i, k = 1, 2),$$

on reconnaît tout de suite que, au point P,

$$\lambda = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = -K, \quad \lambda_{12} = 0. \tag{3.12}$$

Les valeurs des dérivées secondes peuvent être réunies dans la formule

$$\lambda_{ik} = -\delta_{ik}K \qquad (i, k = 1, 2), \tag{3.13}$$

δ_{ik} étant les symboles de Kronecker (0 pour $i \neq k$, 1 pour $i = k$).

On a, par conséquent,

$$\Gamma^i_{jh} = \frac{1}{2\lambda}\sum_{l}^{2}{}_{1}\,\delta_{il}\{\delta_{lj}\lambda_h + \delta_{lh}\lambda_j - \delta_{jh}\lambda_l\}.$$

Puisque δ_{il} est nul pour $l \neq i$ et égal à l'unité pour $l = i$, il reste simplement

$$\Gamma^i_{jh} = \frac{1}{2\lambda}\{\delta_{ij}\lambda_h + \delta_{ih}\lambda_j - \delta_{jh}\lambda_i\}. \tag{3.14}$$

En introduisant ces valeurs dans (3.9) et en remplaçant au premier

---

(¹) *Voir* ma Note, *Forme canoniche dei ds^2 binari con data curvatura totale* (*Rend. Acc. Lincei*, Vol. XXV, 1937, p. 197-205).

membre t^i par $\frac{dx^i}{ds}$, il vient [à cause de $\lambda(t^{1^2}+t^{2^2})=1$]

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}=\gamma\nu^i-\frac{t^i}{\gamma}\sum_{1}^{2}{}_h\lambda_h t^h+\frac{2\lambda}{\lambda_i}. \tag{3.15}$$

Au point P il reste simplement

$$\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_{\mathrm{P}}=\gamma\nu^i \qquad (i=1,\ 2). \tag{3.16}$$

De même (3.10) se réduit, toujours au point P, à

$$\left(\frac{d\nu^i}{ds}\right)_{\mathrm{P}}=-\gamma t^i. \tag{3.17}$$

En dérivant (3.15) par rapport à s, en tenant compte de ce que, pour une fonction $f(x^1,\ x^2)$, telle que λ, λ_h ou λ_i,

$$\frac{df}{ds}=\sum_{1}^{2}{}_j\frac{df}{\partial x^j}\frac{dx^j}{ds}=\sum_{1}^{2}{}_j\frac{\partial f}{\partial x^j}t^j,$$

et en se rapportant ensuite au point P, il vient, d'après (3.16),

$$\left(\frac{d^3x^i}{ds^3}\right)_{\mathrm{P}}=\dot\gamma\nu^i-\gamma^2t^i-\frac{t^i}{\lambda}\sum_{1}^{2}{}_{hj}\lambda_{hj}t^ht^j+\frac{1}{2\lambda^2}\sum_{1}^{2}{}_j\lambda_{ij}t^j,$$

où $\dot\gamma$ signifie $\frac{d\gamma}{ds}$ (au point P, cela va sans dire) et les termes omis s'annulent en P.

En ayant égard aux formules (3.13), on a

$$\left(\frac{d^3x^i}{ds^3}\right)_{\mathrm{P}}=\dot\gamma\nu^i-\gamma^2t^i+\mathrm{K}t^i-\frac{1}{2}\mathrm{K}t^i=\dot\gamma\nu^i+\left(\frac{1}{2}\mathrm{K}-\gamma^2\right)t^i. \tag{3.18}$$

Au point P, $\lambda=1$ et les paramètres $t^1=\frac{dx^1}{ds}$, $t^2=\frac{dx^2}{ds}$ d'une direction quelconque **t** coïncident, d'après (3.11), avec leurs cosinus de direction, c'est-à-dire avec $\cos\theta$, $\sin\theta$, si θ est l'angle que le vecteur **t** forme avec la direction positive de la ligne coordonnée x^1 ($x^2=$const.).

Analoguement **v** a les paramètres

$$\nu^1 = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta, \qquad \nu^2 = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta,$$

étant toujours tourné par rapport à **t** de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif des rotations (qui est celui de la circulation $P_h P_{h+1} P_{h+2}$), lorsqu'on envisage un triangle.

Il s'ensuit, d'après (3.3), (3.16) et (3.18), toujours pour le point P et ayant égard aux (3.12),

$$(3.19) \qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{dx^1}{ds}\right)_P &= \cos\theta, \\ \left(\frac{d^2x^1}{ds^2}\right)_P &= -\gamma\sin\theta, \\ \left(\frac{d^3x^1}{ds^3}\right)_P &= \left(\frac{1}{2}K - \gamma^2\right)\cos\theta - \dot\gamma\sin\theta, \\ \left(\frac{dx^2}{ds}\right)_P &= \sin\theta, \\ \left(\frac{d^2x^2}{ds^2}\right)_P &= \gamma\cos\theta, \\ \left(\frac{d^3x^2}{ds^3}\right)_P &= \left(\frac{1}{2}K - \gamma^2\right)\sin\theta + \dot\gamma\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Au numéro précédent nous avons caractérisé la petitesse d'un arc de courbe *plane*. Ici il s'agit plus généralement de courbes tracées sur une surface, ce qui fait intervenir aussi, on le voit notamment dans les développements ci-dessus, la courbure K. La manière dont doit se comporter K pour des arcs (et des triangles) petits peut se condenser en peu de mots, si l'on convient d'indiquer indifféremment par D la dérivée (d'une fonction ponctuelle sur σ) par rapport à l'une ou à l'autre des lignes coordonnées. Alors, L ayant toujours la signification de longueur maximum à envisager dans les calculs, l'hypothèse à introduire à l'égard de K est que les produits (tous des nombres purs)

$$KL^2, \quad DK.L^3, \quad D^2K.L^4, \quad \ldots$$

soient d'un ordre non inférieur à 2, 3, 4, ...

Nous sommes finalement à même d'écrire, comme au numéro précédent, et *avec les mêmes remarques pour les arcs qui seront à* *regarder petits,* les développements suivant les puissances de l'arc s (explicités jusqu'au troisième ordre inclus) des coordonnées x^1, x^2 d'une courbe C sortant du point P dans la direction θ (à partir de la ligne coordonnée x^1). On aura en premier lieu, puisque x^1, x^2 s'annulent pour $s = 0$,

$$x^i(s) = s\left\{\left(\frac{dx^i}{ds}\right)_P + \frac{1}{2}s\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_P + \frac{1}{6}s^2\left(\frac{d^3x^i}{ds^3}\right)_P + (3)\right\} \qquad (i = 1, 2),$$

où les dérivées au point P sont définies par (3.19).

En mettant en évidence les facteurs $\cos\theta$, $\sin\theta$, on pourra écrire

$$(3.20) \qquad \begin{cases} x^1 = \cos\theta\, y^1 + \sin\theta\, z^1, \\ x^2 = \cos\theta\, y^2 + \sin\theta\, z^2, \end{cases}$$

où

$$(3.21) \qquad \begin{cases} y^1 = s\left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}K - \gamma^2\right)s^2 + (3)\right\}, \\ y^2 = s\left\{\frac{1}{2}\gamma s + \frac{1}{6}\dot{\gamma} s^2 + (3)\right\}; \end{cases}$$

$$(3.22) \qquad \begin{cases} z^1 = s\left\{-\frac{1}{2}\gamma s + \frac{1}{6}\dot{\gamma} s^2 + (3)\right\}, \\ z^2 = s\left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}K - \gamma^2\right)s^2 + (3)\right\}. \end{cases}$$

Evidemment, les (3.21) sont les expressions paramétriques des coordonnées d'une courbe C tangente en P à la ligne x^1 $(\theta = 0)$, tandis que les (3.22) se rapportent à une courbe tangente à la ligne orthogonale x^2.

4. Corde géodésique issue de P. Angle avec la courbe au point P. Longueur. — S'il s'agit en particulier d'une géodésique $(\gamma = \dot{\gamma} = 0)$, on tire des (3.21), (3.22)

$$y^1 = s\left\{1 + \frac{1}{12}Ks^2 + (3)\right\}, \qquad y^2 = s\,(3);$$

$$z^1 = s\,(3), \qquad z^2 = s\left\{1 + \frac{1}{12}Ks^2 + (3)\right\}.$$

La représentation paramétrique (3.20) se réduit partant à

$$(4.1)\qquad \left\{\begin{aligned} x^1 &= \cos\theta\, s\left(1 + \frac{1}{12}\mathrm{K}s^2\right) + \sin\theta\, s \textcircled{3},\\ x^2 &= \sin\theta\, s\left(1 + \frac{1}{12}\mathrm{K}s^2\right) + \cos\theta\, s \textcircled{3}.\end{aligned}\right.$$

Considérons sur C un point P′, dont l'abscisse curviligne soit l, en regardant $l > 0$, c'est-à-dire les arcs comptés positivement de P vers P′. Supposons pour simplifier d'avoir choisi en P la direction de la ligne x^1 tangente à C. Alors c'est la représentation paramétrique (3.21) qui convient à C, et il suffit d'y poser $s = l$ pour avoir les coordonnées

$$l\left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\mathrm{K} - \gamma^2\right)l^2 + \textcircled{3}\right\},\qquad l\left\{\frac{1}{2}\gamma\, l + \frac{1}{6}\dot{\gamma}\, l^2 + \textcircled{3}\right\}$$

du point P′.

Ce même point appartient d'ailleurs aussi à la corde $\overline{\mathrm{PP}'}$, représentée paramétriquement par (4.1) et correspond à $s = a$. Égalant et divisant par l, on a

$$(4.2)\qquad \left\{\begin{aligned} 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\mathrm{K} - \gamma^2\right)l^2 + \textcircled{3} &= \frac{a}{l}\cos\theta\left(1 + \frac{1}{12}\mathrm{K}a^2\right),\\ \frac{1}{2}\gamma\, l + \dot{\gamma}\, l^3 + \textcircled{3} &= \frac{a}{l}\sin\theta\left(1 + \frac{1}{12}\mathrm{K}a^2\right),\end{aligned}\right.$$

qui définissent $\frac{a}{l}$ et θ en fonction de l et des caractères se rapportant au point P : γ, $\dot{\gamma}$ de la courbe C, K de la surface σ.

Tout d'abord, en divisant la seconde équation par la première, on tire

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\frac{1}{2}\gamma\, l + \frac{1}{6}\dot{\gamma}\, l^2}{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\mathrm{K} - \gamma^2\right)l^2} + \textcircled{3} = \frac{1}{2}\gamma\, l + \frac{1}{6}\dot{\gamma}\, l^2 + \textcircled{3},$$

montrant, ce qui était évident *a priori*, que $\operatorname{tang}\theta$ est une petite quantité de premier ordre. Dès lors, par le développement de Maclaurin, puisque $\operatorname{tang}\theta$ est une fonction impaire, $\operatorname{tang}\theta = \theta + \textcircled{3}$.

et par conséquent

$$(4.3) \qquad \theta = \frac{1}{2}\gamma l + \frac{1}{6}\dot{\gamma} l^2 + \textcircled{3}, \qquad \cos\theta = 1 - \frac{1}{8}\gamma^2 l^2 + \textcircled{3}.$$

Avec une telle valeur de $\cos\theta$, la première des équations (4.2) donne successivement, en négligeant d'abord même le premier ordre,

$$\frac{a}{l} = 1 + \textcircled{1},$$

puis le second

$$\frac{a}{l} = 1 + \textcircled{2},$$

et enfin seulement le troisième

$$1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\mathrm{K} - \gamma^2\right) l^2 = \frac{a}{l}\left(1 - \frac{1}{8}\gamma^2 l^2\right)\left(1 + \frac{1}{12}\mathrm{K} l^2\right) + \textcircled{3}.$$

Dans le dernier binome on a pu écrire tranquillement l au lieu de a, puisque la différence entre $\mathrm{K}l^2$ et $\mathrm{K}a^2$ est non seulement du troisième, mais même du quatrième ordre. Il vient de la sorte

$$\begin{aligned} \frac{x}{l} &= \left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\mathrm{K} - \gamma^2\right) l^2\right\}\left(1 + \frac{1}{8}\gamma^2 l^2\right)\left(1 - \frac{1}{12}\mathrm{K} l^2\right) + \textcircled{3} \\ &= 1 - \frac{1}{24}\gamma^2 l^2 + \textcircled{3} \end{aligned}$$

ou, si l'on veut,

$$(4.4) \qquad a = l\left\{1 - \frac{1}{24}\gamma^2 l^2 + \textcircled{3}\right\},$$

relation bien connue entre la longueur d'un petit arc et sa corde, pour une courbe plane ou de l'espace ordinaire (1). Pour une courbe tracée sur une surface quelconque (où γ indique sa courbure *géodésique* et a la longueur de la corde géodésique), le résultat a été déjà signalé par Darboux (2), qui a poussé le calcul jusqu'au quatrième ordre

---

(1) Elle découle immédiatement de la représentation canonique d'une courbe au voisinage d'un de ses points. *Voir*, par exemple, JULIA, *loc. cit. à la page* 11, p. 132; E. CESÀRO y parvient par des considérations directes à la page 194 de ses *Elementi di calcolo infinitesimale*, Napoli, Alvano, 1905.

(2) *Loc. cit. à la page* 1, p. 176.

inclus. Même en s'arrêtant au troisième, on aurait pu s'attendre à l'intervention de K, puisque au cours du calcul on a affaire aux termes du troisième ordre dans le développement paramétrique (qui dépendent en général des dérivées premières et *secondes* des coefficients du ds^2). Le résultat montre qu'il n'en est rien ; tandis que je n'ai pas réussi à m'en rendre compte d'une manière synthétique.

Remarque. — Dans la formule (4.4) la valeur de γ se rapporte au point P, une des deux extrémités commune à l'arc et à sa corde. Au même ordre d'approximation, on peut remplacer la valeur de γ en P par sa détermination à l'autre extrémité P′, ou plus généralement dans un point quelconque M, intérieur à l'arc $\widehat{PP'}$. En effet, si $s \leqq l$ est l'abscisse curviligne $\widehat{PM}$ de M, on a, d'après la formule des accroissements finis,

$$\gamma_M = \gamma \{ 1 + ① \},$$

ce qui assure la validité des (4.4), au troisième ordre près, quel que soit le point M de PP′ auquel on rapporte la détermination de γ.

5. Retour au triangle $P_h P_{h+1} P_{h+2}$. Le triangle des cordes géodésiques. Relations entre les côtés et les angles de ces deux triangles. — Revenons au triangle $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ en remarquant que, au point de vue qualitatif (sens et signes), tout marche, si le triangle est assez petit, comme dans le cas des petits triangles circulaires dans le plan (n° 1).

D'après cela, fixons notre attention sur un sommet quelconque P_h, et continuons à appeler φ_h l'angle du triangle donné (formé en P_h par les deux arcs curvilignes $\widehat{P_h P_{h+1}}$ et $\widehat{P_h P_{h+2}}$), α_h l'angle des cordes géodésiques correspondantes $\overline{P_h P_{h+1}}$ et $\overline{P_h P_{h+2}}$. Comme au n° 1, il convient d'introduire les deux angles β, compris au point P_h entre les côtés $\widehat{P_h P_{h+1}}$, $\widehat{P_h P_{h+2}}$ et leurs cordes. Nous les appellerons $\beta_{h,h+1}$ et $\beta_{h,h+2}$ respectivement, *le premier indice se rapportant au sommet.* Au n° 1, à cause d'une propriété du cercle, on avait seulement trois angles β, et l'on pouvait se passer du premier indice. En envisageant par exemple le côté $\widehat{P_h P_{h+1}}$, on avait l'égalité des deux angles $\beta_{h,h+1}$ et $\beta_{h+1,h}$, qu'on appelait tous les deux β_{h+2}. Ici nous devons introduire six β, à deux indices distincts. Leur évaluation a été substantiellement faite au numéro précédent : on n'a qu'à spécifier dûment la formule (4.3).

Appliquons-la d'abord à l'angle $\beta_{h,h+1}$, compris au point P_h entre l'arc $\widehat{P_h P_{h+1}}$ et sa corde. Alors $\beta_{h,h+1}$ s'identifie avec θ, pourvu que l'on remplace l par la longueur l_{h+2} du côté $\widehat{P_h P_{h+1}}$ opposé au point P_{h+2}, et γ, $\dot\gamma$ par γ_{h+2} et $\dot\gamma_{h+2}$, ou, en spécifiant davantage, par $(\gamma_{h+2})_{P_h}$, $(\dot\gamma_{h+2})_{P_h}$, ce qui met en évidence le point de l'arc $\widehat{P_h P_{h+1}}$ auquel se rapportent les valeurs de la courbure et de sa dérivée. On a de la sorte

$$(5.1) \qquad \beta_{h,h+1} = \frac{1}{2}(\gamma_{h+2})_{P_h} l_{h+2} + \frac{1}{6}(\dot\gamma_{h+2})_{P_h} l_{h+2}^2 + ③.$$

Le signe de $\beta_{h,h+1}$ est celui du terme prépondérant, c'est-à-dire (les longueurs l étant nécessairement positives) de $(\gamma_{h+2})_{P_h}$, comme il doit arriver, conformément aux remarques faites au n° **1**, à propos de la formule (1.1). Naturellement on peut donner à h les valeurs 1, 2, 3, avec la convention usuelle de réduire mod 3 tout indice $h+1$, $h+2$.

La notation $\cdot$ indique la dérivée par rapport à l'arc du côté $\widehat{P_h P_{h+1}}$, compté de P_h vers P_{h+1}, c'est-à-dire dans *le sens* $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ *adopté comme positif pour la circulation sur le périmètre du triangle.*

Considérons maintenant l'autre côté $\widehat{P_h P_{h+2}}$ aboutissant au point P_h, et l'angle $\beta_{h,h+2}$ qu'il forme avec sa propre corde $\overline{P_h P_{h+2}}$. Son expression, fournie directement par (4.3) serait

$$\beta_{h,h+2} = \frac{1}{2}(\gamma_{h+1})_{P_h} l_{h+1} + \frac{1}{6}(\dot\gamma_{h+1})_{P_h} l_{h+1}^2 + ③,$$

où l'indice $h+1$ se rapporte au côté $\widehat{P_h P_{h+2}}$, opposé au sommet P_{h+1}; ici évidemment on doit regarder la dérivée $\dot\gamma_{h+1}$ de la courbure faite $\left(\text{par rapport à l'arc du côté } \widehat{P_h P_{h+2}}\right)$ vers P_{h+2}. Le sens ne coïncide pas cette fois avec le sens positif de circulation $P_h P_{h+1} P_{h+2}$, mais se trouve renversé. Si *nous convenons que le point superposé $\cdot$ désigne toujours une dérivation dans le sens circulaire* $(h, h+1, h+2)$, *adopté comme positif sur le périmètre du triangle,* il faut remplacer dans le second membre de la formule ci-dessus le signe + par —, et il vient

$$(5.2) \qquad \beta_{h,h+2} = \frac{1}{2}(\gamma_{h+1})_{P_h} l_{h+1} - \frac{1}{6}(\dot\gamma_{h+1})_{P_h} l_{h+1}^2 + ③.$$

La règle à retenir est que, dans les expressions des β à deux indices distincts, si l'ordre de ces indices est progressif [formule (5.1)], le second terme a le signe $+$, tandis qu'il est précédé du signe $-$ si [comme dans (5.2)] l'ordre circulaire des deux indices est rétrograde.

Dans les formules (5.1) et (5.2) figurent les γ et $\dot{\gamma}$ d'un même côté, soit (par un choix convenable des indices) $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$, rapportées une fois à P_{h+1} et une fois à P_{h+2}. On le constate en écrivant $h+1$ au lieu de h dans les formules (5.1), ce qui donne, en mettant en évidence le point auquel se rapporte la détermination,

$$\beta_{h+1,h+2} = \frac{1}{2}(\gamma_h)_{P_{h+1}} l_h + \frac{1}{6}(\dot{\gamma}_h)_{P_{h+1}} l_h^2 + (3);$$

et $h+2$ au lieu de h dans (5.2), ce qui donne

$$\beta_{h+2,h+1} = \frac{1}{2}(\gamma_h)_{P_{h+2}} l_h - \frac{1}{6}(\dot{\gamma}_h)_{P_{h+2}} l_h^2 + (3).$$

Il est avantageux de faire apparaître dans les deux formules les déterminations au point M_h, milieu de l'arc $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$. On a, en procédant dans le sens direct de la circulation,

$$(\gamma_h)_{M_h} \; l_h = (\gamma_h)_{P_{h+1}} l_h + \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_h)_{P_{h+1}} l_h^2 + (3),$$

$$(\gamma_h)_{P_{h+2}} l_h = (\gamma_h)_{M_h} \; l_h + \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_h)_{M_h} \; l_h^2 + (3).$$

Supprimons la spécification ponctuelle lorsqu'il s'agit du point M_h, et remarquons que

$$(\dot{\gamma}_h)_{P_{h+1}} l_h^2 = (\dot{\gamma}_h)_{M_h} l_h^2 + (3) = \dot{\gamma}_h l_h^2 + (3).$$

Il vient alors

$$(\gamma_h)_{P_{h+1}} l_h = \gamma_h l_h - \frac{1}{2}\dot{\gamma}_h l_h^2 + (3),$$

$$(\gamma_h)_{P_{h+2}} l_h = \gamma_h l_h + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_h l_h^2 + (3),$$

et les expressions précédentes de $\beta_{h+1,h+2}$ et $\beta_{h+2,h+1}$ prennent la forme définitive

$$(5.3) \qquad \beta_{h+1,h+2} = \frac{1}{2}\gamma_h l_h - \frac{1}{3}\dot{\gamma}_h l_h^2 + (3),$$

$$(5.4) \qquad \beta_{h+2,h+1} = \frac{1}{2}\gamma_h l_h + \frac{1}{3}\dot{\gamma}_h l_h^2 + (3),$$

où *c'est toujours le premier indice qui marque le sommet auquel se rapporte l'angle; et l'on doit entendre par* γ_h, $\dot{\gamma}_h$ *justement leur détermination au milieu* M_h *du côté* $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$.

Des formules analogues à (1.2) expriment l'angle φ_h du triangle donné moyennant l'angle correspondant α_h du triangle des cordes et les β. Elles s'écrivent actuellement

$$\varphi_h = \alpha_h + \beta_{h,h+1} + \beta_{h,h+2},$$

c'est-à-dire, d'après (5.3) et (5.4), en isolant α_h,

$$(5.5) \quad \alpha_h = \varphi_h - \frac{1}{2}(\gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2}) - \frac{1}{3}(\dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 - \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2) + (3) \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Dans ces relations [ainsi que dans les (4.3), dont elles dérivent] ne figure pas, au troisième ordre près, la courbure totale K de la surface, où a siège le triangle. Il en est de même pour les expressions des longueurs des cordes géodésiques en fonction des côtés. En effet, la formule (4.4), rapportée au côté $\widehat{P_{h+1}P_{+2}}$ de longueur l_h, donne, pour la corde géodésique a_h,

$$(5.6) \qquad a_h = l_h \left\{ \left(1 - \frac{1}{24}\gamma_h^2 l_h^2\right) + (3) \right\},$$

où il est loisible [n° 4, remarque finale] de regarder γ_h comme étant la détermination au point M_h, milieu du côté $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$.

Nous avons désormais dans les formules (5.5), (5.6) tout ce qu'il nous faut pour établir, en seconde approximation, la trigonométrie des petits triangles curvilignes de σ.

6. Relations trigonométriques. — Le triangle des cordes géodésiques a les côtés a_h et les angles α_h. Dans notre approximation, c'est-à-dire *au troisième ordre près,* (vis-à-vis de l'unité, bien entendu), la surface σ, aux environs d'un quelconque de ses points O, peut être envisagée comme *une variété à courbure constante* K, la détermination de K se rapportant justement au point O ([1]).

D'après cela, pour le triangle géodésique ayant les côtés a_h et les angles α_h, sont valables les formules de la trigonométrie sphérique ou lobatchewskienne, suivant le signe de K. On posera

$$K = \frac{1}{R^2},$$

avec la spécification

$$R > 0 \qquad \text{pour } K > 0$$

et

$$-iR > 0 \qquad \text{pour } K < 0 \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

En se bornant au théorème des sinus on aura à transformer, qu'il s'agisse de la sphère ou de la pseudo-sphère, les formules

$$|\sin a'_h| = \frac{l}{|R|} \sin \alpha_h \qquad (h = 1, 2, 3), \tag{6.1}$$

où j'ai posé pour abréger l'écriture

$$a'_h = \frac{a_h}{R} \quad ([2]). \tag{6.2}$$

([1]) La remarque est presque évidente, puisque, dans les représentations canoniques d'une courbe au voisinage d'un point donné, la variation de la courbure affecte seulement les termes à partir du quatrième ordre. Pour plus de détails on peut voir ma Note récente déjà citée à la page 16, ainsi que le mémoire, déjà cité dans la préface, de M. SEVERI, notamment p. 232-241.

([2]) En effet, dans le cas de la sphère ($R > 0$) les premiers membres des (6.1) doivent être $\sin \frac{a_h}{R}$, c'est-à-dire $\sin a'_h$, qui ne diffère pas de $|\sin a'_h|$ pour a'_h positif et assez petit. Dans le cas non euclidien, où R est purement imaginaire ($-iR > 0$), on n'a qu'à remplacer $\sin \frac{a_h}{R}$ par $\mathfrak{s}$ (sinus hyperbolique) de l'argument $\frac{a_h}{|R|}$. Pour constater que c'est encore $|\sin a'_h|$, partons de

$$a'_h = \frac{a_h}{R} = -i \frac{a_h}{|R|};$$

l, indépendant de h, est ce qu'on appelle le *module* du triangle sphérique ou pseudo-sphérique. Sa valeur, exprimée par exemple moyennant les seuls côtés, est

$$(6.3)\qquad \frac{l}{|R|} = \frac{|\sin a'_1 \sin a'_2 \sin a'_3|}{\{1 - \cos^2 a'_1 - \cos^2 a'_2 - \cos^2 a'_3 + 2\cos a'_1 \cos a'_2 \cos a'_3\}^{\frac{1}{2}}}.$$

L'expression de l prête à des remarques intéressantes, mais nous ne nous y arrêterons pas pour ne pas trop allonger le présent article. On se bornera à développer ici encore le ***théorème des sinus***, c'est-à-dire à introduire dans les formules (**6**.1) les expressions (**5**.5) des α_h et (**6**.2), (**5**.6) des a_h, savoir

$$(6.4)\qquad a'_h = \frac{l_h}{R}\left\{1 - \frac{1}{24}\gamma_h^2 l_h^2 + (3)\right\}.$$

D'après la préparation déjà accomplie, justement à l'ordre d'approximation susdit, des expressions (**6**.4) des a'_h et (**5**.5) des α_h, il n'y a qu'à faire la substitution dans les (**6**.1); en résolvant ensuite par rapport aux côtés l_h du triangle curviligne. Un tel calcul a été déjà fait, en se bornant toutefois à la première approximation, au n° **1**, et il nous a conduit aux expressions (**1**.10) des l_h comme fonctions des angles φ_h (des γ_h et de l'auxiliaire l). Il importe de remarquer à ce propos que la longueur auxiliaire l, introduite actuellement comme facteur de proportionnalité dans les formules (**6**.1), s'identifie en première approximation avec ce qu'on a désigné par la même lettre au n° **1**.

En effet, partons des (**6**.1) et tenons compte de ce que a'_h est réel ou purement imaginaire (et par suite a'^2_h est réel en tout cas). Il vient

---

d'où

$$\sin a'_h = -\sin i\frac{a_h}{|R|} = -i\,\mathfrak{s}\frac{a_h}{|R|}.$$

En égalant les modules des deux membres, on a bien

$$|\sin a'_h| = \mathfrak{s}\,\frac{a_h}{|R|}.$$

C. Q. F. D.

Voir, par exemple, Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Vol. I (Terza edizione, Pisa, 1922, p. 638).

d'abord

$$|a'_h| \left\{ 1 - \frac{1}{6} a'^2_h + (4) \right\} = \frac{l}{|R|} \sin\alpha_h.$$

En y remplaçant $|a'_h|$ par sa valeur (6.4), puisque, toujours en vertu des (6.4),

$$a'_h = \frac{l_h}{R}\{1 + (2)\}, \qquad 1 - \frac{1}{6} a'^2_h = 1 - \frac{1}{6}\frac{l_h^2}{R^2} + (4),$$

on tire

$$\frac{l_h}{|R|} = \frac{l}{|R|}\sin\alpha_h \left\{ 1 + \frac{1}{6}\frac{l^2}{R^2}\sin^2\alpha_h + \frac{1}{24}\gamma_h^2 l_h^2 + (3) \right\};$$

d'où, en particulier,

$$l_h = l\sin\alpha_h\{1 + (2)\},$$

ce qui coïncide bien au second ordre près, avec la caractérisation de l, qu'on tire de (1.5) moyennant (1.6).

Dans la parenthèse de la formule, où l'on tient compte aussi du second ordre, on peut remplacer tout bonnement α_h par φ_h, et également l_h par $l\sin\varphi_h$, puisque de la sorte on ne néglige que le troisième ordre devant l'unité. On a ainsi, en écrivant en surplus K au lieu de $\frac{1}{R^2}$,

$$(6.5) \qquad l_h = l\sin\alpha_h \left\{ 1 + \frac{1}{6} l^2 \sin^2\varphi_h \left(K + \frac{1}{4}\gamma_h^2\right) + (3) \right\}.$$

Il ne reste plus qu'à se procurer $\sin\alpha_h$, jusqu'au second ordre, en fonction des φ_h et de l.

En posant pour un moment

$$(6.6) \qquad \delta_h = \frac{1}{2}(\gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2}) + \frac{1}{3}(\dot\gamma_{h+1} l_{h+1}^2 + \dot\gamma_{h+2} l_{h+2}^2),$$

les équations (5.5) s'écrivent

$$\alpha_h = \varphi_h - \delta_h + (3);$$

d'où

$$\sin\alpha_h = \sin\varphi_h\cos\delta_h - \cos\varphi_h\sin\delta_h + (3).$$

En tenant compte de la circonstance que δ_h est du premier ordre, et en négligeant, comme toujours, le troisième (vis-à-vis des termes finis) il s'ensuit

$$\sin\alpha_h = \sin\varphi_h\left(1 - \frac{1}{2}\delta_h^2\right) - \cos\varphi_h.\delta_h + (3).$$

Dans δ_h^2, il y lieu de retenir, d'après (6.6), seulement le carré du premier terme. Il reste partant

$$(6.7)\quad \sin\alpha_h = \sin\varphi_h\left\{1 - \frac{1}{8}(\gamma_{h+1}l_{h+1} + \gamma_{h+2}l_{h+2})^2\right\} - \cos\varphi_h.\delta_h + (3),$$

où δ_h est défini par (6.6). Les parties d'ordre 0 et 1 ont été déjà calculées au n° 1, formule (1.8). Elles peuvent partant s'écrire, d'après (1.9), $\sin\varphi_h$ et $\psi_h \sin\varphi_h$, où

$$(6.8)\quad \psi_h = \frac{1}{2} l(\gamma_h \cos\varphi_h - 3\tau \cot\varphi_h).$$

D'autre part, à cause de (6.6), le terme du second ordre $\chi_h \sin\varphi_h$ dans (6.7) est

$$-\sin\varphi_h \frac{1}{8}(\gamma_{h+1}l_{h+1} + \gamma_{h+2}l_{h+2})^2 - \cos\varphi_h \frac{1}{3}(\dot\gamma_{h+1}l_{h+1}^2 + \dot\gamma_{h+2}l_{h+2}^2).$$

On peut y remplacer l_{h+1} et l_{h+2} par $l\sin\varphi_{h+1}$, $l\sin\varphi_{h+2}$, et l'on a

$$\chi_h = -l^2\left\{\frac{1}{8}(\gamma_{h+1}\sin\varphi_{h+1} + \gamma_{h+2}\sin\varphi_{h+2})^2 + \frac{1}{3}\cot\varphi_h(\dot\gamma_{h+1}\sin^2\varphi_{h+1} + \dot\gamma_{h+2}\sin^2\varphi_{h+2})\right\}.$$

Pour plus de symétrie faisons apparaître, comme au n° 1, la courbure triangulaire

$$(6.9)\quad \tau = \frac{1}{3}\sum_{1}^{3}{}_h \gamma_h \sin\varphi_h,$$

et le trinome analogue

$$(6.10)\quad \tau' = \frac{1}{3}\sum_{1}^{3}{}_h \dot\gamma_h \sin^2\varphi_h.$$

Alors on peut attribuer à χ_h la forme

$$(6.11)\quad \chi_h = -l^2\left\{\frac{1}{8}(3\tau - \gamma_h\sin\varphi_h)^2 + \frac{1}{3}\cot\varphi_h(3\tau' - \dot\gamma_h\sin^2\varphi_h)\right\}.$$

Toujours est-il que (1.7), en y séparant les termes de différents ordres s'écrit

$$(6.12) \quad \sin\alpha_h = \sin\varphi_h \{ 1 + \psi_h + \chi_h + (3) \} \qquad (h = 1, 2, 3).$$

En remarquant que $\sin\alpha_h$ peut être remplacé par $\sin\varphi_h$ lorsqu'il est multiplié par un terme du second ordre, on tire finalement des (6.5) et (6.12)

$$(6.13) \quad \frac{l_h}{|R|\sin\varphi_h} = l \left\{ 1 + \psi_h + \chi_h + \frac{1}{6} l^2 \left(K + \frac{1}{4} \gamma_h^2 \right) \sin^2\varphi_h + (3) \right\}.$$

C'est la forme du théorème des sinus en seconde approximation, ψ_h et χ_h ayant les valeurs (6.8) et (6.11).

7. Remarque sur le théorème de Legendre. — Dans le calcul du numéro précédent nous avons utilisé, pour le triangle des cordes, des formules de trigonométrie sphérique ou pseudo-sphérique. On serait peut-être enclin à penser que, dans l'approximation du second ordre dont nous nous sommes coutentés, on aurait pu d'abord appliquer le théorème de Legendre, qui, au même degré d'approximation, ramène la résolution d'un triangle géodésique sur une surface à courbure constante à celle d'un triangle plan ayant les mêmes côtés et les angles modifiés d'un tiers de l'excès $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi$. En réalité il n'en est rien et voici pour quelle raison.

On arrive à l'énoncé ci-dessus en constatant que les mêmes relations indépendantes, au nombre de trois (précisément celles qui expriment le théorème du cosinus), sont satisfaites *au troisième ordre près* par les éléments du triangle sphérique (ou pseudo-sphérique) et ceux du triangle plan correspondant. Il ne s'ensuit pas d'une manière absolue (comme s'il s'agissait d'égalités rigoureuses) que toute combinaison des trois relations soit également valable dans les deux cas *au même ordre d'approximation*. Justement, pour le théorème des sinus, on s'aperçoit aisément que l'équivalence subsiste seulement en première, mais *non en seconde approximation*.

C'est pour cela que nous avons dû prendre comme point de départ les formules (6.1) de trigonométrie sphérique (ou pseudo-sphérique), sans les réduire d'avance moyennant le théorème de Legendre.

8. Indications générales sur les approximations d'ordre supérieur.

I. *Cas du plan.* — La représentation paramétrique des courbes planes, envisagée au n° 2, peut être poussée, à l'aide de développements tayloriens, suivant les puissances croissantes de l'arc s, jusqu'à un ordre m arbitraire. On suppose, bien entendu, que chaque arc de courbe dont il s'agit, se comporte, par rapport à la courbure géodésique γ et à ses dérivées, d'une manière analogue à celle admise pour les deux premières approximations. On suppose notamment (n° 2, page 11) que, L étant une limite supérieure des longueurs à envisager, et

$$\gamma, \quad \dot\gamma, \quad \ldots, \quad \gamma^{(m-1)}, \quad \gamma^{(m)},$$

les valeurs des dérivées de la courbure (dans n'importe quel point de cet arc), les produits

$$\gamma \mathrm{L}, \quad \dot\gamma \mathrm{L}^2, \quad \ldots, \quad \gamma^{(m-1)} \mathrm{L}^m, \quad \gamma^{(m)} \mathrm{L}^{m+1}$$

(qui sont des nombres purs) ont un ordre de grandeur non inférieure à

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m, \quad m+1,$$

respectivement. Alors, si l'on considère d'abord le vecteur-unité $\mathbf{t}$, tangent à la courbe, on reconnaît, d'après les formules de Frenet, que $\mathbf{t}(s)$, jusqu'à l'ordre m inclus peut être représenté sous la forme

$$\mathbf{t}(s) = \mathcal{A}(s)\mathbf{t}_0 + \mathcal{B}(s)\mathbf{n}_0, \tag{8.1}$$

$\mathcal{A}(s)$ et $\mathcal{B}(s)$ étant des polynomes de degré m en s, dont les coefficients contiennent (sous forme rationnelle et entière) les valeurs de γ et de ses dérivées $\dot\gamma, \ldots, \gamma^{(m-1)}$, jusqu'à l'ordre $m-1$, pour $s=0$ (ou même pour une autre valeur quelconque de s entre 0 et L); $\mathbf{t}_0$ désigne évidemment la détermination de $\mathbf{t}$ pour $s=0$, et $\mathbf{n}_0$ n'est que $\mathbf{t}_0$ tourné de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif.

Si $\mathrm{Q}(s)$ désigne le point courant de l'arc dont on s'occupe, on a

$$\frac{d\mathrm{Q}}{ds} = \mathbf{t}(s)$$

et, par intégration de $\mathbf{t}(s)$, depuis $s=0$, correspondant, disons, au point P, jusqu'à un s générique, on se procure la représentation paramétrique de l'arc. Si l'on pose, pour abréger,

$$\mathcal{C}(s) = \int_0^s \mathfrak{A}(s)\,ds, \qquad \mathfrak{D}(s) = \int_0^s \mathfrak{B}(s)\,ds$$

(les γ figurant dans $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ devant être traitées comme des constantes vis-à-vis de l'intégration), il vient, pour l'autre extrémité P′ de l'arc ($s = l$, $Q = P$)

$$\text{(8.2)} \qquad P' - P = \mathcal{C}(l)\mathbf{t}_0 + \mathfrak{D}(l)\mathbf{n}_0,$$

tandis que, pour le verseur tangentiel $\mathbf{t}'$ au point P, on tire de (8.1), en y posant $s = l$,

$$\text{(8.3)} \qquad \mathbf{t}' = \mathfrak{A}(l)\mathbf{t}_0 + \mathfrak{B}(l)\mathbf{n}_0.$$

D'autre part, si $\mathbf{u}$ désigne le verseur de $P' - P$ et a sa longueur, on a

$$P' - P = a\mathbf{u},$$

ce qui permet d'attribuer à l'équation vectorielle (8.2) la forme

$$\text{(8.4)} \qquad a\mathbf{u} = \mathcal{C}(l)\mathbf{t}_0 + \mathfrak{D}(l)\mathbf{n}_0,$$

qui équivaut à deux équations scalaires, tandis que (8.3), exprimant l'égalité de deux verseurs, revient à une seule. Les trois ensemble permettent de déduire, pour la figure (lunule) formée par un arc $\widehat{PP'}$ et sa corde $\overline{PP'}$, soit la longueur a de la corde, soit les deux angles de contingence entre corde et arc aux sommets P, P′, en fonction de l, de γ et de ses dérivées (jusqu'à l'ordre $m - 1$).

Si maintenant on envisage, toujours dans le plan, un petit triangle $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ ayant pour côtés des courbes quelconques, on peut, pour chaque côté, se procurer de la sorte la longueur a_h de la corde et les deux angles de contingence $\beta_{h+1,h+2}$, $\beta_{h+2,h+1}$ en fonction des l_h, des γ_h et de leurs dérivées. Et l'on aura, comme au n° 5, pour les angles α_h du triangle des cordes,

$$\alpha_h = \varphi_h - (\beta_{h+1,h+2} + \beta_{h+2,h+1}),$$

φ_h étant les angles du triangle curviligne.

Dès lors, on n'a qu'à remplacer, dans une relation quelconque de la trigonométrie rectiligne, les a_h et les α_h en fonction des l_h, des φ_h, des courbures γ_h et de leurs dérivées $\dot{\gamma}_h, \ldots, \gamma_h^{(m-1)}$ (jusqu'à l'ordre $m-1$), pour en déduire les formules correspondantes, se rapportant au triangle curviligne, *exactes jusqu'à l'ordre m inclus*.

II. *Sphère.* — Tout ce qui précède peut être transporté *mutatis mutandis* aux petits triangles (curvilignes quelconques) tracés sur une sphère ou pseudo-sphère, étant naturellement à compter que, au cours de calculs et dans les formules finales, il y aura lieu de rencontrer aussi la constante K de la courbure totale (KL^2 étant censé du second ordre).

III. *Surface quelconque.* — La méthode suivie aux n^{os} 3 et 5, pour $m=2$, sur une surface quelconque, et les compléments esquissés, dans le cas du plan, pour m quelconque, peuvent être combinés. On introduit alors, non seulement les dérivées des courbures géodésiques, jusqu'à l'ordre $m-1$, mais aussi les valeurs de la courbure totale K et de ses dérivées partielles, jusqu'à l'ordre $m-2$, ces dernières dans un même point du triangle, qu'on peut choisir à son gré. On suppose naturellement, à l'égard des ordres de grandeurs, que les choses se passent de la manière spécifiée au n° 3, page 18.

Il convient toutefois, même en restant dans les généralités, de fixer l'attention sur une circonstance qui est bien connue pour les triangles géodésiques ([1]). C'est qu'on ne pourra pas, de règle, aboutir à des relations renfermant *seulement* côtés, angles, courbures géodésiques γ des côtés, courbure totale K de la surface, et leurs dérivées. Ceci à cause de la non-homogénéité métrique de la surface σ, d'après laquelle la position et l'orientation du triangle ne sont pas indifférents, de sorte que, en général, on ne réussira pas à éliminer les coordonnées des sommets (ou quelque autre élément absolu, c'est-à-dire impliquant la localisation du triangle sur la surface σ), qu'il convient d'introduire pour effectuer les calculs, ainsi que pour réduire les valeurs de K et de ses dérivées à un point unique. On est assuré *a priori* qu'une telle difficulté n'existe pas pour les surfaces admettant un groupe ∞^3 de mouvements. Alors, on retombe d'ailleurs sur les surfaces à courbure totale constante.

IV. *Première et seconde approximation.* — On a traité en détail les cas $m=1$ et $m=2$. A la vérité, pour $m=1$, nous nous sommes d'abord appuyés (n° 1) sur la géométrie élémentaire dans le plan;

([1]) Comparez Darboux, *loc. cit.* au début, p. 181-182.

mais nous avons ensuite constaté (à la fin du n° 5) que les résultats de première approximation n'en diffèrent pas, quelle que soit la courbure K, puisqu'elle intervient seulement à partir de $m=2$. *Tout se passe donc en première approximation comme pour les triangles d'arcs de cercle dans le plan.*

Quant à $m=2$, l'analyse développée aux n^{os} 4 et 6 laisse apercevoir que la courbure K, figurant seulement dans des termes du second ordre, peut être rapportée à un même point du triangle. Dès lors, il n'y a pas de différence avec le cas de K constante. On peut, partant, si l'on veut, se placer d'avance sur la sphère, ou sur la pseudo-sphère, suivant le signe de K, ou, comme cas particulier ($K=0$), encore une fois dans le plan.

Il n'est peut-être pas sans intérêt d'ajouter encore un mot sur un modèle canonique pouvant convenir aux côtés de nos triangles curvilignes.

Pour $m=1$ (on vient de le remarquer), tout côté peut être identifié à un petit arc de cercle, donc de son cercle osculateur.

Pour $m=2$, il faut tenir compte aussi de $\dot{\gamma}$, ce qui porte sur des courbes, dont la courbure géodésique n'est pas constante; d'ailleurs, le choix du type canonique est arbitraire. Dès lors, en se rapportant spécifiquement à la sphère, on pourra, par exemple, avoir recours aux courbes loxodromiques; et il serait parfaitement loisible de se borner, pour $m=2$, aux triangles sphériques formés par des arcs loxodromiques : on devra toutefois se servir de loxodromies se rapportant en général à des pôles différents pour les trois côtés.

Journée du 9 juillet.

FLUCTUATIONS

DANS

LA LUTTE POUR LA VIE

LEURS LOIS FONDAMENTALES ET DE RÉCIPROCITÉ

Par M. Vito VOLTERRA.

1. C'est après 1900 que les travaux statistiques et mathématiques de biologie se sont intensifiés. On a commencé par des statistiques et c'est justement en 1900 qu'un éminent mathématicien anglais, Karl Pearson a fondé le journal *Biometrica* qui a rendu d'immenses services aux sciences. C'est Pearson qui a reconnu que les problèmes posés par les théories sur l'évolution, le transformisme et la sélection naturelle devaient être envisagés du point de vue démographique, mais il n'a pas été entendu, tout de suite, par les savants. Il a fallu du temps pour s'en convaincre.

D'après Pearl, un des plus grands statisticiens biologistes vivants, les théories en question semblaient être, il y a quelques années, dans leur lit de mort.

Et cependant les idées d'évolution, de lutte pour l'existence, avaient suscité, de prime abord, un très grand intérêt. Elles avaient été l'objet d'innombrables écrits dépassant tout ce qui avait été fait sur les autres questions d'actualité.

Mais les écrits et les expériences faites sur ces sujets pendant plus d'un demi-siècle, n'avaient pas abouti malgré des contributions d'auteurs célèbres à des conclusions d'une grande portée. Tel est l'avis de Pearl qui ajoute que c'est la nouvelle voie dans laquelle s'est engagée la génétique et que ce sont les nouvelles études sur les populations et sur la dynamique démographique qui ont fait ressusciter le transformisme et la lutte pour la vie en montrant que ces théories conservaient une surprenante vitalité.

Actuellement ces études progressent continuellement, soit au point de vue expérimental et pratique, soit au point de vue mathématique et théorique. Ross et principalement Lotka, Elton, Gause, Thompson et bien d'autres doivent être cités pour leurs calculs, leurs expériences, leur lutte pratique contre les insectes nuisibles à l'agriculture.

Je signale, parmi les travaux les plus récents, le beau volume publié par M. Kostitzin dans la collection Colin.

Deux nouvelles branches de la biologie se sont ainsi développées dans ces derniers temps : la biologie mathématique et la biologie expérimentale.

J'ai déjà eu l'occasion de parler à Paris plusieurs fois sur ce sujet. J'ai fait d'abord à l'Institut Henri Poincaré une série de leçons sur la lutte pour la vie qui ont été réunies en un volume publié en 1931. L'année dernière, dans une conférence, j'ai montré que l'on pouvait avancer dans la dynamique biologique d'une manière analogue à celle qui a été suivie par la mécanique rationnelle, en introduisant un principe variationnel du type de celui de Hamilton, en réduisant les équations fondamentales à la forme canonique, en développant des théories analogues aux théories énergétiques et en énonçant enfin *le principe de la moindre action vitale*.

I.

2. Je commence par donner un résumé de la théorie générale.

Si l'on a une seule espèce dont la population est N_1 et si le coefficient d'accroissement est le nombre positif ε_1, la loi de Malthus s'exprime par

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1,$$

et la population augmente d'une manière exponentielle. De même, la population d'une seconde espèce étant N_2, on aura

$$\frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2.$$

Le coefficient d'accroissement étant le nombre négatif $-\varepsilon_2$. La population alors décroîtra d'une manière exponentielle et l'espèce s'épuisera.

Si les deux espèces vivent ensemble, mais l'une et l'autre n'ont aucune action réciproque, les deux équations précédentes seront vérifiées simultanément.

Mais supposons que les individus de la seconde espèce dévorent ceux de la première, alors le coefficient d'accroissement de la première espèce diminuera d'autant plus que la population de la seconde sera plus grande, tandis que le coefficient d'accroissement de la seconde espèce augmentera avec la population de la première dont les individus forment sa nourriture. Si nous admettons dans une première approximation que ces augmentations et ces diminutions soient linéaires, il faudra remplacer ε_1 et ε_2 par $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$ et $-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$, γ_1 et γ_2 étant des coefficients positifs constants. C'est pourquoi il faudra mettre à la place des équations précédentes les suivantes :

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)N_1, \qquad \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)N_2.$$

Nous laisserons de côté l'intégration de ces équations qui a formé le sujet de plusieurs travaux et nous passerons au cas général de n espèces.

Pour l'étudier j'ai employé, dans mes précédents travaux, *le principe des rencontres*. Montrons maintenant d'une manière très sommaire que l'on peut obtenir les mêmes résultats en généralisant aussi le procédé que nous venons d'utiliser dans le cas de deux espèces.

Envisageons une association biologique de n espèces ayant les populations $N_1, N_2, \ldots, N_n$ et supposons que les individus des unes dévorent ceux d'autres espèces.

Leurs coefficients d'accroissement qui seraient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ si chaque espèce était seule seront modifiés à cause de leurs actions mutuelles.

Si nous supposons toujours que ces modifications soient données par des termes fonctions linéaires des populations, les coefficients d'accroissement pour les espèces r et s s'écriront

$$\varepsilon_r + \sum_1^n {}_s A_{sr} N_s, \qquad \varepsilon_s + \sum_1^n {}_r A_{rs} N_r.$$

Or il est évident que A_{sr} et A_{rs} doivent être des constantes de signe contraire, parce que si l'espèce s dévore l'espèce r, A_{sr} devra être négatif; mais alors l'espèce r est dévorée par l'espèce s et par suite

A_{rs} devra être positif. Si les deux espèces n'ont aucune action réciproque, on aura $A_{rs} = A_{sr} = 0$. On aura en outre que toutes les A avec des indices égaux seront toujours nulles. Qu'est-ce que signifient A_{rs} et A_{sr}?

Il est évident que A_{sr} mesure l'effet exercé sur l'accroissement de l'espèce r par la présence dans l'association biologique de chaque individu de l'espèce s tandis que A_{rs} mesure la réaction exercée sur l'accroissement de l'espèce s par la présence de chaque individu de l'espèce r. Or ces deux actions ne peuvent pas s'égaliser en général en valeur absolue.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de deux espèces : l'une de gros poissons, l'autre de petits poissons et que les individus de la première dévorent ceux de la seconde. On conçoit facilement que l'introduction d'un gros poisson qui dévore les petits aura plus d'effet pour altérer l'accroissement de ceux-ci que n'en aura, pour l'accroissement de l'espèce des gros poissons, l'introduction d'un petit, laquelle n'aura d'autre effet que d'augmenter dans une faible mesure la nourriture des gros poissons.

On pourra tenir compte de cette remarque en faisant une nouvelle hypothèse, d'ailleurs très facile à accepter, et qui consiste à donner des valeurs différentes aux individus selon qu'ils appartiennent à l'une ou à l'autre espèce. Les inverses de ces valeurs seront alors les équivalents des individus des différentes espèces.

Appelons $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ ces valeurs et, par suite, $\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_n}$ ces équivalents, ce qui correspond à dire que $\frac{1}{\beta_r}$ individus de l'espèce r sont équivalents à $\frac{1}{\beta_s}$ individus de l'espèce s. En vertu de cette hypothèse, on pourra prendre

$$A_{sr} = \frac{1}{\beta_r} a_{sr}, \qquad A_{rs} = \frac{1}{\beta_s} a_{rs}, \qquad a_{sr} = -a_{rs},$$

et alors les coefficients d'accroissement des différentes espèces seront donnés par

$$\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r}\sum_{s}^{n}{}_{1} a_{sr} N_s, \qquad \varepsilon_s + \frac{1}{\beta_s}\sum_{r}^{n}{}_{1} a_{rs} N_r.$$

On aura donc, comme extension des équations (A) au cas général de n espèces

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{d\mathrm{N}_r}{dt} = \left(\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r}\sum_s a_{sr}\mathrm{N}_s\right)\mathrm{N}_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Le procédé que nous venons de suivre n'est pas si rigoureux que celui que nous avons employé dans nos travaux précédents, mais peut-être il est plus intuitif et plus simple.

On pourra aussi écrire les équations (B)

$$(1) \qquad \beta_r \frac{d\mathrm{N}_r}{dt} = \left(\varepsilon_r\beta_r + \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{sr}\mathrm{N}_s\right)\mathrm{N}_r,$$

dans lesquelles

$$a_{sr} = -a_{rs}, \qquad a_{sr} = 0, \qquad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n > 0.$$

Si a_{sr} est positif, cela signifie que l'espèce r dévore l'espèce s, s'il est négatif, le contraire sera vérifié, c'est-à-dire l'espèce r sera dévorée par l'autre; si $a_{sr} = 0$ les individus des deux espèces n'agissent pas les uns sur les autres.

Les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont les coefficients d'accroissement des espèces lorsque chaque espèce est seule. On les prendra positifs pour les espèces pour lesquelles il y a une augmentation effective, et négative pour celles qui tendent à s'épuiser.

3. Lorsque les équations

$$(2) \qquad \varepsilon_r\beta_r + \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{sr}\mathrm{N}_s = 0$$

sont satisfaites, les populations $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots, \mathrm{N}_n$ se conservent constantes.

Les équations (2) sont *les équations de l'équilibre* ou de *l'état stationnaire*. Nous supposerons que le déterminant (*déterminant fondamental*)

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0_0 \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul.

Il faut pour cela que les nombres des espèces soit pairs, parce que ce déterminant est hémisymétrique. D'ailleurs on peut démontrer que, si n est impair, on a en général que quelques-unes des espèces tendent à s'épuiser ou à croître indéfiniment. Cela produit une complète modification de l'association biologique qui perd sa stabilité. Nous supposerons donc que *le nombre des espèces soit pair et que le déterminant ne soit pas nul.*

En outre, on fera l'hypothèse que les racines des équations (2) soient positives. Nous les désignerons par $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et nous serons ainsi sûrs qu'il existe un état d'équilibre et que ces nombres donneront les populations d'équilibre.

4. On tire des équations (2)

$$\sum_{1}^{n}{}_r \varepsilon_r \beta_r q_r = 0.$$

C'est pourquoi il est nécessaire pour avoir l'équilibre, que les ε_r n'aient pas toutes le même signe, car les β_r sont toutes positives.

Varions les ε_r de $\Delta\varepsilon_r$, alors les racines des équations (2) varieront de $\Delta q_1, \Delta q_2, \ldots, \Delta q_n$. Par conséquent, à cause des équations (2), on aura

$$\beta_r \Delta\varepsilon_r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{sr} \Delta q_s = 0, \tag{3}$$

d'où

$$\sum_{1}^{n}{}_r \beta_r \Delta\varepsilon_r \Delta q_r = 0. \tag{4}$$

Si les quantités $\Delta\varepsilon_r$ ne sont pas nulles et ont toutes le même signe, les Δq_r ne pourront pas être toutes nulles [*voir* (3)] et celles qui ne sont pas nulles auront des signes différents [*voir* (4)].

II.

5. Envisageons maintenant les lois fondamentales des fluctuations. L'énoncé de la première est le suivant :

Si l'on a un nombre pair d'espèces, et s'il existe un état stationnaire, en partant d'un état initial non d'équilibre, on aura des fluctuations qui ne s'amortissent pas.

On dit que l'on a des fluctuations d'une population, si elle a des maxima et des minima pour des valeurs du temps infiniment grand.

Elles s'amortissent si les oscillations deviennent aussi petites que l'on veut pour des valeurs suffisamment grandes du temps.

Pour démontrer cette loi, il faut commencer par obtenir une intégrale des équations (1).

Supposons que les équations (2) aient les racines $q_1, q_2, \ldots, q_n$. On pourra alors écrire

$$\varepsilon_r \beta_r = -\sum_1^n a_{sr} q_s,$$

et les équations (1) deviendront, en éliminant $\varepsilon_r \beta_r$,

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{sr}(N_s - q_s) N_r.$$

En multipliant ces équations par $\dfrac{N_r - q_r}{N_r}$ et en sommant par rapport à l'indice r de 1 à n, il viendra, puisque $a_{sr} = -a_{rs}$,

$$\sum_1^n{}_r \frac{\beta_r}{N_r}(N_r - q_r)\frac{dN_r}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^n{}_r \left(\beta_r \frac{dN_r}{dt} - \beta_r q_r \frac{1}{N_r}\frac{dN_r}{dt}\right) = 0,$$

et, en intégrant,

$$(5) \qquad \sum_1^n{}_r (\beta_r N_r - \beta_r q_r \log N_r) = C,$$

C étant une constante.

Posons

$$\beta_r (N_r - q_r \log N_r) = P_r.$$

On aura en dérivant

$$\frac{dP_r}{dN_r} = \beta_r\left(1 - \frac{q_r}{N_r}\right), \qquad \frac{d^2 P_r}{dN_r^2} = \beta_r \frac{q_r}{N_r^2}.$$

Donc la valeur minima de P_r s'obtiendra en prenant $N_r = q_r$ et sera

$$p_r = \beta_r q_r (1 - \log q_r).$$

On voit, d'autre part, que les valeurs de N_r et P_r se correspondent de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} N_r, & 0 \ldots \rightarrow \ldots q_r \ldots \rightarrow \infty, \\ P_r, & \infty \ldots \leftarrow \ldots p_r \ldots \rightarrow \infty \end{array}$$

(la flèche indique le sens de la croissance).

On tire de là, puisque

$$\sum_1^n {}_r P_r = C$$

(C étant fini si les N_r ont des valeurs initiales finies), que *chaque* N_r *doit se conserver comprise entre deux nombres positifs finis.*

Il est évident que, si les $N_r = q_r$, on a $C = \sum_1^n p_r$ et inversement, lorsque C a cette valeur, on a que toutes les $N_s = q_s$.

C'est pourquoi la condition nécessaire et suffisante pour que la constante C soit égale à $\sum_1^n p_r$ est que l'état de l'association biologique soit stationnaire.

Les équations (1) donnent

$$\beta_r \frac{d \log N_r}{dt} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s a_{sr} N_s \right),$$

et, en intégrant entre t_0 et t,

$$\frac{\beta_r}{t - t_0} \log \frac{N_r(t)}{N_r(t_0)} = \varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s a_{sr} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t N_s(\tau)\, d\tau.$$

Puisque $N_r(t)$, $N_r(t_0)$ doivent être compris entre des nombres positifs finis, il suit que, en faisant croître indéfiniment t, le premier membre de l'équation précédente aura pour limite θ et, par conséquent, on trouvera que les quantités

$$n_s = \lim_{t=\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_0^t N_s(\tau)\, d\tau$$

satisfont les équations (2) de l'équilibre. Le déterminant n'étant pas nul, il faut donc que $n_s = q_r$, c'est-à-dire : *la moyenne asymptotique de* N_s *sera* q_s. On appellera simplement *moyenne* cette *moyenne asymptotique*.

Si $N_1, N_2, \ldots, N_n$ avaient des limites pour t infini, ces limites seraient leurs moyennes asymptotiques et, par suite, elles correspondraient à un état stationnaire. Donc la constante C aurait la valeur $\sum_1^n {}_s p_s$ et, par conséquent, les valeurs de $N_1, N_2, \ldots, N_n$ correspondraient à un état d'équilibre et se conserveraient constantes. On tire de là que, si l'état initial n'est pas d'équilibre, les $N_1, N_2, \ldots, N_n$ ne tendront pas vers des limites et, par suite, *les fluctuations ne s'amortiront pas.*

Le première loi est ainsi démontrée complètement. Elle prend le nom de *loi de la conservation des fluctuations.*

D'après ce que nous avons trouvé précédemment, *les moyennes des populations sont égales aux populations d'équilibre.* C'est la seconde loi.

Cette loi s'appelle *la loi de la conservation des moyennes.*

En effet, celles-ci étant égales aux populations d'équilibre sont indépendantes des conditions initiales et, par suite, ne changent pas en variant les conditions initiales.

6. Nous arrivons maintenant à la troisième loi qui s'appelle *la loi de la variation des moyennes.*

Elle se rapporte au changement des moyennes asymptotiques lorsqu'on modifie les coefficients d'accroissement, c'est-à-dire lorsqu'on augmente ou qu'on diminue contemporainement tous les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, ce qui correspond à supposer que l'on accroît ou que l'on détruit les espèces proportionnellement à leurs populations. La destruction, par exemple, peut se réaliser par la pêche lorsque l'association biologique est constituée par plusieurs espèces de poissons cohabitant dans le même milieu.

Calculons les variations des moyennes asymptotiques correspondant aux $\Delta\varepsilon_r$ ayant toutes le même signe.

On tire du paragraphe 4 que si les $\Delta\varepsilon_r$ sont toutes positives ou toutes négatives, les Δq_r ne peuvent pas être ni toutes nulles, ni toutes du même signe. C'est pourquoi *les moyennes de certaines espèces doivent augmenter et les moyennes d'autres espèces doivent diminuer,* c'est-à-dire qu'en augmentant ou diminuant contemporainement les coefficients d'accroissement des espèces, quelques-unes en seront avantagées, tandis que d'autres seront défavorisées.

Mais les espèces peuvent être classées en trois catégories : 1. Celles qui en dévorent d'autres sans être dévorées par aucune. 2. Celles qui sont dévorées par d'autres sans qu'elles en dévorent aucune. 3. Celles qui sont dévorées par d'autres espèces et en dévorent aussi d'autres.

Il est évident que la première catégorie ne peut pas exister toute seule, et de même la deuxième catégorie, mais il pourra arriver que les trois catégories existent contemporainement, ou qu'il en existe deux, ou qu'il existe la troisième seule.

Supposons que les $\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2, \ldots, \Delta\varepsilon_n$ soient négatives et que la première espèce soit comprise parmi celles qui sont avantagées de la destruction, c'est-à-dire que Δq_1 soit positive.

Alors deux cas peuvent se présenter : ou l'un des nombres a_{21}, $a_{31}, \ldots, a_{n1}$ est négatif, ou ces nombres sont tous positifs ou nuls. Le cas où tous ces nombres sont nuls n'est pas possible, car le déterminant n'est pas nul.

Dans le premier cas existe une espèce qui dévore la première et, par suite, une espèce dévorée est avantagée. Dans le second cas, $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ sont tous positifs ou nuls; par conséquent, en vertu de la première des équations (3), parmi les $\Delta q_2, \Delta q_3, \ldots, \Delta q_n$ il y en aura des positives et, par suite, il y aura une des espèces $2, 3, \ldots, n$ qui sont dévorées par l'espèce 1 qui sera avantagée.

Donc il existe toujours une espèce dévorée qui est favorisée, c'est-à-dire parmi les espèces qui s'avantagent il y en aura au moins une qui appartient à la catégorie 2 ou à la catégorie 3.

Mais, si l'espèce 1 s'avantage de la destruction (correspondant à la diminution des quantités ε_r), il doit exister une espèce qui est défavorisée. Alors, si l'on fait pour celle-ci un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire pour l'espèce 1, on trouvera qu'il doit exister au moins une espèce des catégories 1 et 3, c'est-à-dire une espèce dévoratrice, qui est endommagée.

7. La troisième loi, c'est-à-dire la loi de la variation des moyennes, pourra donc s'énoncer de la manière suivante : *Si l'on détruit toutes les espèces uniformément et proportionnellement à leurs populations, la moyenne d'une au moins des espèces dévorées (espèces appartenant aux catégories* 2 *et* 3) *augmentera et la moyenne d'une au moins des espèces dévoratrices (c'est-à-dire appartenant aux catégories* 1 *et* 3) *diminuera.*

Cela correspond au fait que l'une au moins des espèces appartenant aux catégories **2** et **3** s'avantagera, et une au moins des espèces appartenant aux catégories **1** et **3** sera endommagée.

Dans le cas qu'il n'existe que des espèces des catégories **1** et **2**, alors la destruction avantage au moins une des espèces **2** et défavorise une au moins des espèces **1**.

Mes précédents travaux n'envisageaient que ce cas. Je n'appelais espèces dévoratrices que celles appartenant à la catégorie **1** et espèces dévorées que celles appartenant à la catégorie **2**. Je supprimais l'existence des espèces appartenant à la catégorie **3**, ce qui limitait beaucoup la portée de la troisième loi et m'éloignait des conditions réelles qui se présentent en nature.

Je laisserai de côté l'exposition des vérifications expérimentales auxquelles ont amené les trois lois, car nous nous éloignerions du point de vue mathématique que nous ne voulons pas abandonner.

III.

8. Nous passerons plutôt à l'exposé des principes de réciprocité qui découlent des lois et des formules que nous avons envisagées.

Supposons d'avoir deux états d'équilibre. Le premier correspond aux coefficients d'accroissement $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ et aux populations d'équilibre $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

L'autre correspond aux coefficients $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ et aux populations d'équilibre $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$. Nous ferons en plus l'hypothèse, que nous maintiendrons aussi dans la suite, que les β_r et les a_{rs} ne changent pas.

En vertu des équations (2), on aura

$$(2')\qquad \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n{}_s\, a_{sr} q_s = 0, \\ &\varepsilon'_r \beta'_r + \sum_1^n{}_s\, a_{sr} q'_s = 0, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r \beta_r q'_r = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s\, a_{rs} q_s q'_r,$$

$$\sum_1^n{}_r\, \varepsilon'_r \beta_r q_r = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s\, a_{rs} q'_s q_r.$$

Mais

$$\sum_1^n{}_r\sum_1^n{}_s a_{rs}q'_s q_r=\sum_1^n{}_r\sum_1^n{}_s a_{sr}q'_r q_s=-\sum_1^n{}_r\sum_1^n{}_s a_{rs}q_s q'_r,$$

donc

$$\sum_1^n{}_r \varepsilon_r\beta_r q'_r=-\sum_1^n{}_r \varepsilon'_r\beta_r q_r.$$

C'est le *premier des principes de réciprocité.*

9. Remarquons que les quantités q_r et q'_r doivent être positives, mais cette limitation n'embrasse pas leurs variations. En outre, observons que les équations (3), qu'on obtient en variant les équations (2′), ont la même forme, car celles-ci sont linéaires.

Or, dans les équations (3), ne paraissent pas les ε_r ni les q_r; donc, quelles que soient les $q_1, q_2, \dots, q_n$, les Δq_r sont toujours les mêmes, pourvu que l'on conserve les valeurs des $\Delta\varepsilon_r$. On pourra donc énoncer le théorème : *Les variations des populations d'équilibre dépendent des variations des coefficients d'accroissement, mais sont indépendantes des coefficients d'accroissement et des populations primitives d'équilibre.*

Il est évident que cette proposition est subordonnée à la condition que les populations d'équilibre, après leur variation, se conservent positives.

10. En vertu des équations (2) et (3), on obtient

$$\sum_1^n{}_r \varepsilon_r\beta_r\,\Delta q_r=\sum_1^n{}_r\sum_1^n{}_s a_{rs}q_s\,\Delta q_r,$$

$$\sum_1^n{}_r \Delta\varepsilon_r\,\beta_r q_r=\sum_1^n{}_r\sum_1^n{}_s a_{rs}\,\Delta q_s q_r,$$

et, par un procédé analogue à celui suivi dans le paragraphe 8, on a

$$\sum_1^n{}_r \varepsilon_r\beta_r\,\Delta q_r=-\sum_1^n{}_r \Delta\varepsilon_r\beta_r q_r.$$

C'est le *second principe de réciprocité.*

11. On tire des équations (4) que si $\Delta\varepsilon_i$ n'est pas nul, tandis que $\Delta\varepsilon_1, \ldots, \Delta\varepsilon_{i-1}, \Delta\varepsilon_{i+1}, \ldots, \Delta\varepsilon_n$ sont nulles, on doit avoir $\Delta q_i = 0$. Il s'ensuit le théorème :

La population d'équilibre d'une espèce se conserve, si l'on change son coefficient d'accroissement, pourvu qu'on ne change pas les coefficients des autres espèces.

Mais nous avons trouvé, dans le paragraphe 5, que la moyenne de la population d'une espèce coïncide avec sa population d'équilibre; donc, on peut énoncer la proposition précédente de la manière suivante :

Si l'on conserve sans altération les coefficients d'accroissement des espèces, une seule exceptée, la moyenne de la population de cette espèce ne changera pas, tandis que les moyennes des populations d'autres espèces changeront.

Ce théorème a un énoncé qui semble *paradoxal*, c'est pourquoi on peut l'appeler *le paradoxe démographique*. Il est facile cependant de se persuader de son exactitude.

Il suffit pour cela d'envisager un exemple particulier, celui de deux espèces que nous avons considéré dans le paragraphe 2.

Les équations (A) deviennent, dans le cas de l'équilibre,

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 = 0, \qquad -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 = 0,$$

c'est pourquoi les populations d'équilibre seront

$$q_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \qquad q_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1},$$

et nous aurons

$$\Delta q_1 = \frac{\Delta\varepsilon_2}{\gamma_2}, \qquad \Delta q_2 = \frac{\Delta\varepsilon_2}{\gamma_1}.$$

Si par exemple $\Delta\varepsilon_1 > -\varepsilon_1$ est négative et $\Delta\varepsilon_2 = 0$, il viendra Δq_2 négative et $\Delta q_1 = 0$; donc, une réduction de l'accroissement de l'espèce 1 (espèce dévorée), sans qu'il y ait aucune variation dans le coefficient d'accroissement de l'espèce 2, produira une diminution de la population d'équilibre et, par suite, de la moyenne de l'espèce 2 (espèce dévorante), mais ne modifiera pas la population d'équilibre de l'espèce 1 et, par suite, sa moyenne. Il est facile de concevoir la vérité de cette conclusion, parce qu'il y a une sorte de compensation entre la variation négative de l'accroissement de l'espèce dévorée et la diminution de la destruction due à la réduction de la population de l'espèce dévorante. C'est pourquoi la moyenne de la première espèce ne changera pas, tandis que celle de la seconde espèce diminuera.

Tous les autres cas qui peuvent se présenter s'interprètent de façon analogue.

12. Supposons de donner aux coefficients d'accroissement une première fois les variations $\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2, \ldots, \Delta\varepsilon_n$ et une seconde fois les variations $\Delta'\varepsilon_1, \Delta'\varepsilon_2, \ldots, \Delta'\varepsilon_n$, et que l'on obtienne d'abord les variations des populations d'équilibre $\Delta q_1, \Delta q_2, \ldots, \Delta q_n$, et après $\Delta' q_1$, $\Delta' q_2, \ldots, \Delta' q_n$.

A cause des équations (3), on aura

$$\beta_r \Delta \varepsilon_r + \sum_s^{1\ldots n} a_{sr} \Delta q_s = 0,$$

$$\beta_r \Delta' \varepsilon_r + \sum_s^{1\ldots n} a_{sr} \Delta' q_s = 0,$$

d'où

$$\sum_r^{1\ldots n} \beta_r \Delta \varepsilon_r \Delta' q_r = \sum_r^{1\ldots n} \sum_s^{1\ldots n} a_{rs} \Delta q_s \Delta' q_r.$$

$$\sum_r^{1\ldots n} \beta_r \Delta' \varepsilon_r \Delta q_r = \sum_r^{1\ldots n} \sum_s^{1\ldots n} a_{rs} \Delta' q_s \Delta q_r.$$

Mais

$$\sum_r^{1\ldots n} \sum_s^{1\ldots n} a_{rs} \Delta q_s \Delta' q_r = \sum_s^{1\ldots n} \sum_s^{1\ldots n} a_{sr} \Delta q_r \Delta' q_s = -\sum_r^{1\ldots n} \sum_s^{1\ldots n} a_{rs} \Delta' q_s \Delta q_r.$$

Donc

$$\sum_r^{1\ldots n} \beta_r \Delta\varepsilon_r \Delta' q_r = -\sum_r^{1\ldots n} \beta_r \Delta' \varepsilon_r \Delta q_r.$$

C'est le *troisième principe de réciprocité*.

Nous avons appelé (§ 2) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les valeurs des individus des différentes espèces. C'est pourquoi $V_r = \beta_r N_r$ sera la valeur de l'espèce r et

$$V = \sum_1^n {}_r \beta_r N_r$$

sera la valeur de l'association biologique constituée des n espèces.

De même $v_r = \beta_r q_r$ sera la valeur moyenne de l'espèce r et

$$v = \sum_1^n {}_r \beta_r q_r$$

sera la valeur moyenne de l'association.

Étant $a_{sr} = -a_{rs}$, on aura

$$\frac{dV}{dt} = \sum_1^n {}_r \frac{\beta_r \, dN_r}{dt} = \sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r N_r + \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s a_{sr} N_s N_r = \sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r N_r,$$

et, par conséquent,

$$dV = \sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r N_r \, dt.$$

Donc, à chaque instant, l'augmentation de la valeur de l'association ne dépendra que des coefficients d'accroissement, car elle ne dépendra pas des actions réciproques que les différentes espèces exercent les unes sur les autres. Une association de cette sorte s'appelle *conservative*.

Supposons

$$\Delta\,\varepsilon_1 = \Delta\,\varepsilon_2 = \ldots = \Delta\,\varepsilon_{r-1} = \Delta\,\varepsilon_{r+1} = \ldots = \Delta\,\varepsilon_n = 0,$$
$$\Delta'\varepsilon_1 = \Delta'\varepsilon_2 = \ldots = \Delta'\varepsilon_{s-1} = \Delta'\varepsilon_{s+1} = \ldots = \Delta'\varepsilon_n = 0,$$

tandis que $\Delta\varepsilon_r$ et $\Delta'\varepsilon_s$ ne sont pas nuls.

A cause du troisième principe de réciprocité, on aura

$$\beta_r\,\Delta\varepsilon_r\,\Delta' q_r = -\,\beta_s\,\Delta'\varepsilon_s\,\Delta q_s,$$

et, par suite, si

$$\Delta\varepsilon_r = \Delta'\varepsilon_s,$$

il viendra

$$\beta_r\,\Delta' q_r = -\,\beta_s\,\Delta q_s,$$

c'est-à-dire

$$\Delta' v_r = -\Delta v_s.$$

On aura donc la proposition :

La variation de la valeur moyenne de l'espèce r (variation de la valeur de la population d'équilibre) *produite par une variation du coefficient d'accroissement de l'espèce s est égale et de signe contraire à la variation de la valeur moyenne de l'espèce s* (variation de la valeur de la population d'équilibre) *due à une variation égale du coefficient d'accroissement de l'espèce r.*

Ce théorème présente une analogie avec les théorèmes de réciprocité connus de la théorie de l'élasticité et de l'électrostatique, mais il en diffère par un changement de signe. En effet, ces derniers théorèmes dépendent d'un déterminant symétrique, tandis que le théorème précédent qu'on a en biologie découle de l'existence d'un déterminant hémisymétrique.

15. Je terminerai par une élégante extension donnée par M^lle^ H. Freda des propositions précédentes.

Prenons un groupe d'espèces appartenant à l'association et considérons sa valeur moyenne $\Sigma\beta_r q_r$ qu'on obtient en additionnant les valeurs moyennes des espèces qui le composent. La variation de cette valeur, due à un changement des coefficients d'accroissement, sera $\Sigma\beta_r \Delta q_r$.

Si l'on ne varie que les coefficients d'accroissement des espèces du groupe, et *d'une même quantité* $\Delta\varepsilon$ (variation uniforme), on aura, à cause de l'équation (4),

$$\Sigma\beta_n \Delta\varepsilon \Delta q_n = 0$$

et, par suite,

$$\Sigma\beta_n \Delta q_n = 0;$$

la valeur moyenne du groupe ne change pas.

Envisageons un second groupe d'espèces différentes. Si nous le réunissons au premier, nous obtiendrons un ensemble dont la valeur ne changera pas en donnant la même variation à tous les coefficients d'accroissement des espèces qui le constituent.

Mais la variation de la valeur moyenne de l'ensemble est formée des variations des valeurs moyennes des deux groupes; dans chacune d'elles on pourra réunir les termes qui résultent de la variation uniforme limitée aux seuls coefficients d'accroissement des espèces de l'un ou l'autre groupe. Distinguant les deux groupes par les indices 1 et 2, on aura donc

$$\Delta V_{11} + \Delta V_{22} + \Delta V_{12} + \Delta V_{21} = 0,$$

ΔV_{ik} désignant la variation de la valeur moyenne du groupe i lorsque la modification uniforme des coefficients d'accroissement intéresse les seules espèces du groupe k.

Les deux premiers termes de l'égalité précédente étant nuls, les deux autres doivent se compenser, c'est-à-dire être égaux et de signe contraire.

On peut donc énoncer les théorèmes suivants :

Si l'on donne aux coefficients d'accroissement d'un groupe d'espèces une variation uniforme, la valeur moyenne de ce groupe ne change pas.

La variation de la valeur moyenne d'un groupe due à une variation uniforme des coefficients d'accroissement d'un autre groupe est égale et de signe contraire à la variation de la valeur moyenne du second groupe pour la même variation uniforme des coefficients du premier.

Ces théorèmes généralisent ceux des paragraphes **11** et **14**.

On peut ajouter que le premier de ces théorèmes reste valable si le groupe embrasse toute l'association.

VITO VOLTERRA.

Journée du 9 juillet 1937.

L'INTÉGRALE DE RIEMANN-LIOUVILLE

ET

LE PROBLÈME DE CAUCHY

POUR

L'ÉQUATION DES ONDES

Par M. Marcel RIESZ.

C'est la notion de la *partie finie* de certaines intégrales due à M. Hadamard qui forme le point de départ de ces recherches. On connaît les applications brillantes à la théorie des équations aux dérivées partielles que M. Hadamard a données de la notion qu'il a créée ([1]). Chez lui il s'agit surtout d'équations à coefficients variables, tandis que la méthode que nous allons développer ne s'applique qu'à des équations à coefficients constants ([2]). En revanche, elle permet de donner pour ces équations une solution du problème de Cauchy qui est la même pour les dimensions impaires et paires.

Considérons d'abord, comme M. Hadamard, l'intégrale de Riemann-Liouville

$$\mathrm{I}\, f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt \quad ([3]).$$

Elle converge pour $\alpha > 0$ et satisfait aux relations fondamentales

$$(1) \qquad \mathrm{I}^\alpha(\mathrm{I}^\beta) = \mathrm{I}^{\alpha+\beta}, \qquad \frac{d}{dx}(\mathrm{I}^{\alpha+1}) = \mathrm{I}^\alpha.$$

([1]) *Cf.* (aussi pour la littérature) J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris, Hermann, 1932.

([2]) *Voir* pourtant pour l'extension de la méthode la Note additionnelle.

([3]) Le facteur $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ ne figure pas chez M. Hadamard.

Dans des conditions de dérivabilité convenables, il s'agit maintenant d'étendre la définition de cette intégrale à des valeurs de α pour lesquelles elle cesse de converger. M. Hadamard arrive à cette extension pour des indices négatifs non entiers en retranchant de l'intégrale divergente certaines parties infinies d'ordre fractionnaire. Ce qui reste c'est alors la partie finie de l'intégrale. On peut atteindre le même but, et cela aussi pour l'indice zéro et les indices entiers négatifs, par un procédé qui me semble très naturel, celui du prolongement analytique par rapport à l'indice α. En supposant l'existence d'un assez grand nombre de dérivées, on obtient au moyen des intégrations par parties

$$\mathrm{I}^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(x-a)^{\alpha+k} + \mathrm{I}^{\alpha+n} f^{(n)}(x).$$

La dernière expression s'écrit

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{\alpha+n-1}\,dt,$$

l'intégrale étant convergente pour $\alpha > -n$. Le prolongement analytique se trouve donc effectué pour tous ces indices. Bien entendu, le prolongement en question peut être obtenu par bien d'autres procédés. Signalons en particulier la formule suivante qui est très utile dans les applications et par laquelle nous nous approchons beaucoup de l'ordre d'idées de M. Hadamard.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\alpha} f(x) = {} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [f(t) - \mathrm{P}(t)](x-t)^{\alpha-1}\,dt \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(x)(x-a)^{k+\alpha}}{(k+\alpha)k!},\end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{P}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k \quad (^1).$$

(1) Nos procédés s'étendent facilement à des intégrales qui possèdent plusieurs singularités, par exemple à des intégrales de la forme

$$\mathrm{I}^{\alpha,\beta} f = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_y^x f(t)(t-y)^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1}\,dt.$$

L'intégrale prolongée satisfait, sauf dans des cas exceptionnels faciles à préciser, aux relations fondamentales (1) dont la seconde pourra aussi servir à effectuer le prolongement en question.

Pour les indices $\alpha = 0$ et entiers négatifs $\alpha = -n$ on trouve, comme il fallait s'y attendre,

$$I^0 f(x) = f(x), \qquad I^{-n} f(x) = f^{(n)}(x).$$

Arrêtons-nous un instant sur les dernières relations. On voit que, pour tout autre indice, $I^\alpha f(x)$ est une fonctionnelle dépendant de toutes les valeurs que $f(t)$ admet entre a et x, tandis que, pour $\alpha = 0$ ou entier négatif, $I^\alpha f(x)$ a une valeur de caractère local; ce ne sont que les valeurs admises au voisinage infinitésimal de x qui interviennent. *Voilà en germe le principe de Huygens* [1]. C'est évidemment au facteur $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$, s'annulant pour les indices en question, que ces indices doivent leur caractère exceptionnel. D'ailleurs, même sans effectuer le prolongement analytique d'une façon explicite, on voit nettement que le prolongement de

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt \qquad (\delta > 0),$$

est zéro pour $\alpha = 0$ ou entier négatif, parce que l'intégrale ne cesse jamais de converger. Les valeurs de $f(t)$ qui interviennent dans cette intégrale ne donneront donc aucune contribution à la valeur finale.

J'ai insisté sur ces questions élémentaires bien familières à vous tous, parce qu'elles nous permettront de bien saisir la différence qu'on rencontre dans la solution du problème de Cauchy de l'équation des ondes, posé pour un nombre pair ou pour un nombre impair de variables.

Considérons dans l'espace à m dimensions les points P et Q aux coordonnées respectives $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Nous intro-

---

(1) Nous entendons ici et dans tout ce qui suit par principe de Huygens la *mineure* du principe dans la terminologie de M. Hadamard (*loc. cit.*, p. 75). D'après ce principe, une perturbation lumineuse étant localisée à l'instant $t = 0$ au voisinage immédiat du point O, son effet sera localisé, pour $t = t'$, au voisinage immédiat de la surface d'une sphère de centre O et de rayon ct', c désignant la vitesse de la lumière.

duisons la distance lorentzienne de ces points

$$r_{PQ} = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 - (x_2-\xi_2)^2 - \ldots - (x_m-\xi_m)^2},$$

en supposant que l'expression qui figure sous le signe racine carrée soit $\geqq 0$. En considérant le point P comme fixe et le point Q comme variable, $r_{PQ} = 0$ définit la nappe du cône-lumière au sommet P, $r_{PQ}^2 > 0$ définit son intérieur, $x_1 - \xi_1 > 0$ le cône rétrograde et $x_1 - \xi_1 < 0$ le cône direct. C'est le cône rétrograde que nous allons considérer en général, en le désignant par D^P. Soit encore S une surface (c'est-à-dire une variété à $m-1$ dimensions) que les génératrices des cônes rétrogrades appartenant aux points P considérés ne coupent qu'en un seul point. On admet aussi que la surface soit assez régulière pour que les dérivations qui interviendront plus tard puissent être effectuées. Le domaine limité par la nappe rétrograde et la surface S sera désigné par D_S^P.

Cela étant, nous posons

$$\text{(2)} \qquad I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ,$$

avec

$$\text{(3)} \qquad H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}}\, 2^{\alpha-1}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right).$$

Cette intégrale converge pour $\alpha > m-2$ et l'on vérifie facilement qu'elle satisfait aux relations fondamentales

$$\text{(4)} \qquad I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}, \qquad \Delta I^{\alpha+2} = I^\alpha,$$

où l'on a désigné par Δ l'opérateur des ondes :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}.$$

Ajoutons que ces propriétés de notre intégrale déterminent entièrement le facteur $H_m(\alpha)$.

Pour les indices $\alpha \leqq m-2$ l'intégrale (2) se définit au moyen de prolongement analytique par rapport à α, bien entendu dans des conditions de régularité convenables portant sur la fonction f et sur la surface S. *On trouve en particulier* $I^0 f(P) = f(P)$. Remarquons que ce fait, qui est d'une importance capitale pour la suite, n'est nullement évident. En effet, I^0 est défini ici comme prolongement analytique de I^α qui ne converge que pour $\alpha > m-2$, et le prolongement en question n'existe que dans certaines conditions de dérivabilité [1]. Des remarques analogues s'appliquent aux relations $I^{-2k} = \Delta^k$.

Il est clair par ce qui précède que notre procédé d'intégration tire son origine de l'opérateur différentiel du second ordre Δ. On a vu en effet que $\Delta I^2 = 1$, c'est-à-dire que I^2 est dans un certain sens l'inverse de l'opérateur des ondes. Or on peut construire un procédé qui, dans le même sens, forme l'inverse de l'opérateur différentiel du premier ordre *gradient* ou *nabla*, cet opérateur étant pris au sens lorentzien. Il est manifeste que ce procédé devra être de caractère vectoriel [2].

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_m$ les composantes d'un vecteur arbitraire X et définissons *les nombres de Clifford* comme symboles de calcul ou comme vecteurs unités par la relation

$$X^2 = (X_1 e_1 + X_2 e_2 + \ldots + X_m e_m)^2 = X_1^2 - X_2^2 - \ldots - X_m^2.$$

Cette relation met en évidence les règles de calcul

$$e_1^2 = -e_2^2 = \ldots = -e_m^2 = 1$$

et

$$e_j e_k + e_k e_j = 0 \qquad (j \neq k).$$

L'opérateur $\nabla = \sum_{k=1}^{m} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ a manifestement la propriété $\nabla^2 = \Delta$ [3].

Nous posons

$$J^\alpha f(P) = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \left[\cos\frac{\pi\alpha}{2} I^\alpha f(P) - i \sin\frac{\pi\alpha}{2} \nabla[I^{\alpha+1} f(P)] \right],$$

l'opération ∇ pouvant être exécutée sous le signe $\int$. On a alors

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}, \qquad \nabla J^{\alpha+1} = J^\alpha, \qquad J^{2k} = I^{2k},$$

k étant un nombre entier. En particulier on a $J^0 f(P) = f(P)$ ou plus

---

(1) Pour m impair ou pair il suffit de supposer l'existence des dérivées d'ordre $\leqq \frac{m+1}{2}$ ou $\leqq \frac{m}{2}$ respectivement.

(2) L'intégration vectorielle que j'esquisse ici ne figurait pas dans ma conférence. Je l'ai indiquée succinctement après la conférence en réponse à une question de M. Fréchet qui présidait à la séance.

(3) Depuis les travaux de M. Dirac, ces choses sont certainement bien familières à la plupart des lecteurs.

brièvement $J^0 = 1$. Signalons encore l'opérateur remarquable

$$Of(P) = \nabla[I^1 f(P)]$$

qui satisfait à la relation $O^2 = 1$.

En remarquant que la plupart des considérations qui suivent s'appliquent — *mutatis mutandis* — aussi à nos intégrales vectorielles, retournons aux intégrales scalaires.

Définissons avec M. d'Adhémar *la conormale* n à la surface S au point Q (*la transversale* suivant la terminologie de M. Hadamard) par la relation

$$dx_1\,\delta x_1 - dx_2\,\delta x_2 - \ldots - dx_m\,\delta x_m = 0,$$

où d et δ désignent respectivement un déplacement arbitraire sur la surface et un déplacement sur la conormale. Cela étant, nous choisissons celle des deux directions admissibles QT qui rend le produit scalaire lorentzien des vecteurs QP et QT positif. Il vient alors par la formule de Green

$$\begin{aligned} I^{\alpha} u(P) = {} & \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \int_{D_S^P} \Delta u(Q)\, r_{PQ}^{\alpha+2-m}\, dQ \\ & + \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \int_{S^P} \left[\frac{\partial u(Q)}{\partial n} r_{PQ}^{\alpha+2-m} - u(Q) \frac{\partial r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{\partial n} \right] dS, \end{aligned}$$

tous les éléments géométriques étant mesurés, ici et dans la suite, dans le sens lorentzien. (Il faut prendre quelques précautions aux points de S où le plan tangent est en même temps tangent à un cône-lumière. D'ailleurs ce cas sera exclu plus loin quand il s'agira de l'application de la formule au problème de Cauchy.)

La formule ci-dessus qui contient une intégrale spatiale, une simple couche et une double couche peut se mettre sous une forme plus condensée. En effet, en posant d'une manière générale

$$(5)\quad \begin{aligned} I^{*\alpha} f, g, h(P) = {} & \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ \\ & + \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{S^P} \left[g(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m} - h(Q) \frac{\partial r_{PQ}^{\alpha-m}}{\partial n} \right] dS, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$(6)\qquad I^{\alpha} u(P) = I^{*\alpha+2} \Delta u, \frac{\partial u}{\partial n}, u(P).$$

Avant d'aller plus loin, signalons quelques propriétés importantes du symbole $I^\star$. On a

$$I^\alpha I^{\star\beta} = I^{\star\alpha+\beta}, \qquad \Delta I^{\star\alpha+2} = I^{\star\alpha}, \tag{7}$$

et en outre

$$I^{\star 0} f,\ g,\ h(P) = f(P). \tag{8}$$

La formule (6) conduit facilement à la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. En effet il s'ensuit pour $\alpha = 0$, grâce à la relation $I^0 u = u$,

$$u(P) = I^{\star 2}\Delta u,\ \frac{\partial u}{\partial n},\ u(P), \tag{9}$$

c'est-à-dire que la valeur de u au point P peut se calculer par une intégrale spatiale portant sur $\Delta(u)$ et étendue à un certain volume D_S^P, par une simple couche et une double couche portant respectivement sur $\frac{\partial u}{\partial n}$ et u et étendues à une certaine portion S^P de la surface S. Malheureusement, d'après ce que nous avons dit plus haut, ces intégrales sont en général divergentes. En effet elles ne convergent toutes que si l'on a $m \leqq 2$ [1], l'une d'elles, l'intégrale de double couche, diverge déjà pour l'équation de M. Volterra ($m = 3$) et elles divergent toutes à partir de $m = 4$, correspondant à l'équation des ondes relative à l'espace ordinaire. Mais on pourra toujours définir ces intégrales par prolongement analytique, ce qui veut dire que $I^{\star\alpha}\Delta(u), \frac{\partial u}{\partial n}, u$ étant convergent pour α assez grand ($\alpha > m$), on peut, dans les conditions de dérivabilité admises, obtenir $I^{\star 2}$ par prolongement analytique.

La formule fait nettement ressortir la différence qui a lieu entre les cas de m impair et de m pair. Pour m impair, où l'on retrouve la formule de M. Hadamard, le facteur $\frac{1}{H_m(2)}$ ne s'évanouit pas, la solution sera donc fournie par une intégrale spatiale étendue au

---

[1] Néanmoins, même pour $m = 2$, la formule (9) donne une solution erronée, indépendante des valeurs de u sur S, si on l'applique au sens strict, c'est-à-dire en *substituant* $\alpha = 0$ dans le second membre de la formule (6). Par contre, la formule obtenue de (6) par prolongement analytique donne la solution correcte bien connue, où il entre les valeurs de u aux points d'intersection de S et des deux rayons de lumière issus de P.

volume entier D_S^P et des intégrales étendues à la portion de surface entière S^P. Au contraire dans le cas de m pair (> 2), $\frac{1}{H_m(2)}$ s'annule à cause du facteur $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2+2-m}{2}\right)}$, et la formule finale ne sera pas influencée par les valeurs que u et ses dérivées prennent à l'intérieur du cône. L'intégrale spatiale se réduira à une intégrale étendue à la nappe du cône et les intégrales de surface à des intégrales étendues à l'intersection du cône avec la surface S. *Voilà le principe de Huygens : ce ne sont que les points d'univers situés sur la nappe rétrograde du cône au sommet* P *qui agissent sur ce point* (¹). Le principe dérive donc du fait que l'opérateur I^{*2} a pour m pair (> 2) un caractère quasi local, il n'y intervient que des points qui sont à distance zéro du point P (²).

En réalité notre formule n'était jusqu'ici qu'une formule de représentation du même caractère que la formule classique de Cauchy l'est pour les fonctions monogènes. Mais elle donne aussi la solution d'un problème aux limites, notamment celle du problème de Cauchy (³), si l'on admet en plus que la surface S ait, suivant la terminologie de M. Hadamard, une orientation d'espace. Cela veut dire que l'on a pour tout déplacement sur la surface $dx_1^2 - dx_2^2 - \ldots - dx_m^2 < 0$. En effet dans ce cas (et dans ce cas seulement) les domaines d'intégration deviennent infinitésimaux lorsque P s'approche indéfiniment de la surface (⁴).

Je finis cet exposé déjà trop long en donnant *une solution explicite invariante par rapport aux transformations de Lorentz* pour le cas de l'espace ordinaire, c'est-à-dire pour $m = 4$. En écrivant l'équation sous la forme $\Delta(u) = f$, le second membre donne lieu à une intégrale étendue à la nappe du cône qui n'est que le potentiel retardé bien connu. Puisque je ne saurais rien dire de nouveau sur cette partie de la solution, je me restreins ici à l'équation homogène.

(¹) *Cf.* HADAMARD, *loc. cit.*, p. 239 et 324.

(²) Il en est de même, pour m pair, des opérateurs I^{*2k}, k entier positif, $2k \leqq m - 2$, et pour m impair des opérateurs I^{*2k+1}, k entier, $2k+1 \leqq m-2$. I^{*-2k} a pour k entier $\geqq 0$ un caractère strictement local indépendamment de la parité de m. En effet on a (*voir* plus haut) $I^{*0} = u(\mathrm{P})$ et $I^{*-2k} = \Delta^k u(\mathrm{P})$.

(³) C'est le problème de résoudre l'équation $\Delta u = f$, la fonction f étant connue dans l'espace et les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial n}$ étant données sur la surface S.

(⁴) *Cf.* HADAMARD, *loc. cit.*, p. 249.

Posons d'une manière générale $R = R_{PQ} = r^2_{PQ}$ et désignons par s^P la variété à deux dimensions formée par l'intersection du cône au sommet P et de la surface S. En remettant à tout à l'heure l'explication des autres notations, nous écrivons ici la solution suivante du problème de Cauchy posé pour l'équation $\Delta(u) = 0$, solution qu'on peut déduire de la solution générale (9).

$$u(P) = \frac{1}{\pi}\int_{s^P}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u - \left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)_{(\nu)}\right]ds. \tag{10}$$

Vous voyez qu'il n'intervient dans la formule qu'une seule dérivée suivant une certaine direction ν qu'il faudra maintenant définir. Cela est très facile dans le cas classique considéré par Poisson où la surface S est le plan $x_1 = 0$. Alors ν n'est que l'image de la génératrice QP par rapport à ce plan. Dans le cas général la chose est un peu plus compliquée.

Par un élément infinitésimal à deux dimensions du bord s^P contenant le point Q il passe ∞^1 plans à trois dimensions. Formons l'image de la génératrice QP, indéfiniment prolongée au delà de P, par rapport à l'un quelconque de ces plans, par exemple le plan tangent à S en Q, l'image étant prise dans la direction transversale au plan. Cette image, *indépendante du plan choisi*, donne la demi-droite ν appartenant au point Q du bord. Les lignes ν, qui évidemment sont des rayons-lumière, engendrent une surface caractéristique Σ de l'équation des ondes, qui dans un certain sens peut être considérée comme l'image du cône au sommet P par rapport à la surface S. La surface Σ peut aussi être obtenue de la manière suivante. On fait décrire au point d'intégration Q le bord s^P et l'on considère les cônes rétrogrades qui ont leur sommet au point variable Q. Ces cônes enveloppent une surface à deux nappes. La nappe extérieure fait évidemment partie du cône original au sommet P, tandis que la nappe intérieure est identique à la surface Σ.

La dérivée figurant dans notre formule est prise suivant la direction ν. La longueur lorentzienne des segments d'une telle droite étant nulle, on introduit R comme paramètre et forme la dérivée de u par rapport à R suivant ladite direction. Observons que $R = R_{PT}$ varie d'une manière linéaire sur une telle droite. En effet, T désignant un point quelconque de la droite ν appartenant à Q, R_{PT} est égal au double du produit scalaire lorentzien des vecteurs PQ et QT.

Il faut encore définir les valeurs R_1 et R_2 figurant dans notre formule. Remarquons à cet effet que les droites ν, qui sont en nombre ∞^2, forment évidemment une congruence de droites, qui est d'ailleurs d'un caractère bien particulier. En nous trouvant dans quatre dimensions, ce n'est que grâce à cette dernière circonstance que, pour chaque droite fixe ν appartenant à un certain point Q, il existe en général deux directions de déplacements infinitésimaux, $\delta_1 Q$ et $\delta_2 Q$ telles que les droites correspondantes coupent la droite ν. Cela veut dire que la congruence admet en général *deux foyers* Q_1 et Q_2 sur chacune de ses droites. Dans la formule ci-dessus on a posé pour abréger,

$$R_{PQ_1} = R_1, \qquad R_{PQ_2} = R_2.$$

Le lieu géométrique des foyers est la surface focale, *la caustique*, de la congruence, qui dans un certain sens peut être interprétée comme l'image du point P par rapport à la surface S. Dans le cas classique de Poisson elle se réduit à l'image *distincte* de ce point par rapport au plan $x_1 = 0$, et notre solution se réduit immédiatement à celle de Poisson.

En résumé, le principe de Huygens dit que la valeur de u au point P est déterminée par les valeurs que u et ses dérivées premières admettent en des points Q appartenant au passé-lumière du point P. Notre formule y apporte un complément qui doit présenter un certain intérêt, c'est que la seule dérivée qui y entre est prise suivant un certain rayon de lumière, c'est-à-dire que seul le passé-lumière infinitésimal de la fonction u au point Q y intervient. L'intervention de la surface (congruence) Σ et de sa caustique dans notre solution jette un jour nouveau sur les rapports entre l'optique physique et l'optique géométrique.

NOTE ADDITIONNELLE.

Tout récemment j'ai réussi à étendre la méthode d'intégration exposée dans la conférence qui précède aux équations linéaires du type hyperbolique normal *à coefficients variables*. Je me restreins ici à indiquer le procédé pour le cas où le premier membre de l'équation en question est fourni par le paramètre différentiel du second ordre de Beltrami attaché à une certaine forme quadratique. L'extension au cas général est immédiate.

Soit donc

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad (^1)$$

la forme métrique attachée à un espace de Riemann à m dimensions. Nous dirons avec M. Hadamard qu'on se trouve dans le cas hyperbolique normal, si cette forme, transformée en somme de carrés, admet un carré positif et $m - 1$ carrés négatifs. En désignant par g la valeur absolue du déterminant $|g_{ik}| \neq 0$ et par g^{ik} les coefficients de la forme réciproque, le paramètre différentiel correspondant $\Delta_2 u = \Delta u$ s'écrit

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right).$$

La difficulté nouvelle qui se présente ici c'est la formation de la solution élémentaire de l'équation, problème que M. Hadamard a résolu d'une manière ingénieuse. Or le dualisme fatal entre les espaces à dimensions impaires et paires se manifeste dans le cas actuel d'une manière encore plus fâcheuse que dans le cas de l'équation des ondes. Les solutions élémentaires obtenues sont de caractère tout à fait différent, la méthode de la partie finie n'est applicable que pour les dimensions impaires, et pour les dimensions paires il faut recourir à la méthode de la descente. Nous allons montrer que l'introduction d'un paramètre convenable permet encore de donner la solution du problème de Cauchy sous une forme qui est indépendante de la parité de la dimension de l'espace. Chemin faisant nous allons développer un procédé d'intégration fractionnaire tout analogue à celui que nous avons donné dans notre conférence pour le cas de l'équation des ondes.

Nous supposons que dans la région considérée de l'espace les coefficients g_{ik} sont assez réguliers pour que le problème des géodésiques soit résoluble. Nous admettons aussi que deux points quelconques intérieurs à la région peuvent être joints par une géodésique d'une manière univoque. Les géodésiques de longueur nulle issues d'un point P donnent le conoïde caractéristique ayant pour sommet le point P. Ce conoïde divise l'espace (voisin de P) en trois régions dont l'une est extérieure au conoïde et les deux autres intérieures. Certaines conventions faites, on pourra, tout comme dans le cas de l'équation des ondes, sans ambiguïté parler de la nappe rétrograde et de la nappe directe de ce conoïde.

Soit P un point fixe et Q un point variable intérieur au conoïde qui a son sommet en P. Désignons par $s_{PQ} = s_{QP} = s$ la distance géodésique

(1) Nous appliquons dans tout ce qui suit l'écriture tensorielle.

entre P et Q. Nous nous proposons de construire une fonction $V^\alpha(P, Q)$ dépendant d'un paramètre α qui satisfait à l'équation

$$\Delta_Q V^{\alpha+2}(P, Q) = V^\alpha(P, Q), \tag{1}$$

et qui devient singulier sur le conoïde comme $s^{\alpha-m}$. A l'exemple de M. Hadamard nous admettons d'abord que les coefficients g_{ik} sont des fonctions holomorphes des variables x^i. Il en sera alors de même de s sauf sur le conoïde et de s^2 partout. Nous posons

$$V^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k s^{\alpha+2k-m}}{K_m(\alpha) L_m(\alpha+2k)}, \tag{2}$$

les coefficients V_k ne dépendant que de P et de Q, tandis que $K_m(\alpha)$ et $L_m(\alpha)$ ne dépendent que de α (et de la dimension m).

Introduisons maintenant un système de coordonnées normales, admettant le point P comme origine, en gardant la notation g pour la valeur absolue du déterminant des coefficients g_{ik} correspondants. On a alors les formules suivantes faciles à vérifier [1]

$$\Delta_Q s^{\alpha-m} = (\alpha-m) s^{\alpha-m-2}\left(\alpha - 2 + s\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial s}\right),$$

et plus généralement, U étant une fonction arbitraire,

$$\Delta_Q(s^{\alpha-m}U) = (\alpha-m)s^{\alpha-m-2}\left[\left(\alpha-2+s\frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial s}\right)U + 2s\frac{\partial U}{\partial s}\right] + s^{\alpha-m}\Delta_Q U,$$

la notation $\frac{\partial}{\partial s}$ désignant une dérivation suivant la géodésique qui va de P à Q. Cela posé, il vient

$$\Delta V^{\alpha+2} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{\alpha+2k-m}\left\{\frac{\alpha+2+2k-m}{K_m(\alpha+2)L_m(\alpha+2+2k)} \times\left[\left(\alpha+2k+s\frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial s}\right)V_k + 2s\frac{\partial V_k}{\partial s}\right] + \frac{\Delta V_{k-1}}{K_m(\alpha+2)L_m(\alpha+2k)}\right\}.$$

---

(1) *Cf.* HADAMARD, *loc. cit.*, p. 117 et W. FELLER, *Über die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus* (*Math. Annalen*, t. 102, 1930, p. 633-649, *voir* p. 639).

On choisit maintenant $L_m(\alpha)$ de sorte qu'on ait

$$\frac{\alpha + 2 - m}{L_m(\alpha + 2)} = \frac{1}{L_m(\alpha)},$$

et l'on détermine V_k par l'équation différentielle récurrente

$$2s\frac{\partial V_k}{\partial s} + \left(2k + s\frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial s}\right) V_k + \Delta V_{k-1} = 0;$$

$$V_{-1} \equiv 0, \qquad V_0(P, P) = 1.$$

Comme chez M. Hadamard, la solution est uniquement déterminée par le postulat que les $V_k(P, Q)$ soient des fonctions régulières de Q. En effet pour $s = 0$, correspondant à $Q = P$, l'équation ci-dessus n'admet qu'une seule solution régulière. Notons que l'on trouve en particulier

$$V_0(P, Q) = \left(\frac{g(Q)}{g(P)}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Les formules de récurrence posées étant satisfaites, il vient

$$\Delta V^{\alpha+2} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k s^{\alpha+2k-m}}{K_m(\alpha + 2) L_m(\alpha + 2k)}.$$

En choisissant encore $K_m(\alpha)$ en sorte que

$$\frac{\alpha}{K_m(\alpha + 2)} = \frac{1}{K_m(\alpha)},$$

l'équation (1) se trouvera résolue.

$K_m(\alpha)$ et $L_m(\alpha)$ auront les propriétés désirées si l'on pose

$$K_m(\alpha) = K\, 2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

et

$$L_m(\alpha) = L\, 2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - m}{2}\right),$$

K et L étant indépendants de α. Nous écrivons encore

$$H_m(\alpha, k) = K_m(\alpha) L_m(\alpha + 2k),$$

et nous déterminons le produit KL en sorte qu'on ait

$$(3) \qquad H_m(\alpha, 0) = H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right),$$

la fonction $H_m(\alpha)$ étant le facteur adapté à l'équation des ondes qui figure dans notre conférence. Il vient en définitive

$$\begin{aligned} H_m(\alpha, k) &= K_m(\alpha) L_m(\alpha + 2k) \\ &= \pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha+k-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2k+2-m}{2}\right). \end{aligned}$$

Signalons encore la formule de récurrence

$$(4) \qquad H_m(\alpha, k) = (\alpha + 2k - m) H_m(\alpha, k-1),$$

et observons que cette formule associée à la formule (3) détermine entièrement la fonction $H_m(\alpha, k)$ (¹).

La solution élémentaire

$$s^{2-m} U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k s^{2-m+2k}$$

que M. Hadamard forme dans le cas impair est à un facteur constant près identique à notre fonction V^2. Il est instructif de comparer les coefficients U_k à nos coefficients V_k. En normant U par la condition $U(P, P) = 1$, c'est-à-dire $U_0(P, P) = 1$, on a

$$(5) \qquad U_k = \frac{\Gamma\left(2 - \frac{m}{2}\right)}{2^k \Gamma\left(2 - \frac{m}{2} + k\right)} V_k,$$

(¹) Dans le cas elliptique la fonction correspondante $H_m(\alpha, k)$ se détermine par la formule de récurrence (4) combinée avec la relation

$$H_m(\alpha, 0) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} 2^{\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)},$$

cette dernière fonction étant le facteur adapté à l'opérateur de Laplace [*cf.* MARCEL RIESZ, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels* (*Acta de Szeged*, t. 9, 1938, p. 1-42)].

ce qui met en évidence les difficultés qui surgiraient dans le cas où m est un nombre pair, si l'on se bornait à considérer la solution élémentaire V^2 sans introduire un paramètre auxiliaire. En effet $H_m(2, k)$ devient infini pour $2k \leqq m - 4$, ce qui entraîne que V^2 reste fini sur le conoïde. M. Hadamard donne de son côté dans le cas pair une solution élémentaire de la forme

$$s^{2-m} \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-2} U_k s^{2k} + w - 2\mathfrak{U} \log s,$$

où w n'est déterminé qu'à une solution régulière près de l'équation $\Delta u = 0$. Il ne manque pas d'intérêt d'observer que cette solution élémentaire est à un facteur constant et à une fonction régulière additive près identique à

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial \alpha} \quad (\alpha = 2).$$

Soient maintenant P et Q deux points de l'espace de Riemann tels que le conoïde rétrograde appartenant à l'un d'eux et le conoïde direct appartenant à l'autre délimitent un certain domaine B_Q^P. Dès lors on a pour $\alpha > m - 2$ et $\beta > m - 2$

$$\int_{B_Q^P} V^\alpha(P, T)\, V^\beta(Q, T)\, dT = V^{\alpha+\beta}(P, Q); \tag{6}$$

où dT signifie l'élément de volume de l'espace de Riemann. Pour la démonstration, qui est facile, on met en jeu la propriété (1), la formule de Green et le principe du prolongement analytique par rapport à l'un des indices. On obtient par les mêmes moyens *la propriété d'échange* $V^\alpha(P, Q) = V^\alpha(Q, P)$. De là on tire immédiatement la propriété d'échange des coefficients V_k, démontrée par M. Hadamard au moyen de la méthode de la descente.

Il faut encore dire un mot sur la convergence de nos séries. Or, grâce aux relations (5), on voit immédiatement du résultat correspondant de M. Hadamard que nos séries convergent, dès que la distance géodésique des points P et Q est assez petite.

Soit maintenant S une surface (à $m - 1$ dimensions) dans notre espace de Riemann, et admettons que les conoïdes rétrogrades, par exemple, ayant comme sommet un point arbitraire P situé d'un certain côté de S et assez voisin de S, délimitent avec S certains domaines D_S^P. Nous admettons aussi jusqu'à nouvel ordre que nos séries convergent dans ces domaines. Cela étant, on pose

$$(7) \qquad I^\alpha f(P) = \int_{D_S^P} f(Q)\, V^\alpha(P, Q)\, dQ.$$

Cette intégrale ne converge en général que pour $\alpha > m - 2$. On a, en supposant aussi $\beta > m - 2$,

$$(8) \qquad I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$$

et

$$(9) \qquad \Delta I^{\alpha+2} = I^\alpha.$$

Or, dans des conditions de dérivabilité convenables portant sur la fonction f et la surface S, on peut étendre la définition (7) et les relations (8) et (9) à tous les indices positifs, par exemple. On peut aussi définir l'intégrale

$$(10) \quad I^{*\alpha} f, g, h(P) = \int_{D_S^P} f(Q)\, V^\alpha(P, Q)\, dQ + \int_{S^P} \left[g(Q)\, V^\alpha(P, Q) - h(Q) \frac{\partial V^\alpha(P, Q)}{\partial n} \right] dS,$$

tous les éléments géométriques étant mesurés au sens riemannien, S^P étant la portion de surface découpée de S par le conoïde et n étant la transversale (conormale) à la surface S au point Q. Cette direction est déterminée au sens près par l'égalité $g_{ik}\, dx^i\, \delta x^k = 0$, qui doit avoir lieu pour tout déplacement d sur la surface S au point Q et pour le déplacement transversal δ. Le sens est donné par l'inégalité $g_{ik}\, dx^i\, \delta x^k > 0$, où d est un déplacement sur la géodésique allant de Q à P. L'intégrale (10) donne lieu aux relations

$$I^\alpha I^{*\beta} = I^{*\alpha+\beta}$$

et

$$\Delta I^{*\alpha+2} = I^{*\alpha}.$$

On a encore les formules capitales

$$I^0 f(P) = I^{*0} f, g, h(P) = f(P)$$

qui, par l'introduction de coordonnées normales, se réduisent facilement aux formules correspondantes données dans notre conférence.

Ces points acquis, la formule de Green donne

$$I^{\alpha} u(P) = I^{*\alpha+2}\left[\Delta u, \frac{\partial u}{\partial n}, u(P)\right],$$

et en particulier

$$u(P) = I^{*2}\left[\Delta u, \frac{\partial u}{\partial n}, u(P)\right]. \tag{11}$$

Dans le cas où S a une orientation d'espace, c'est-à-dire que $g_{ik}dx^i dx^k < 0$ pour tout déplacement sur la surface, cette formule de représentation devient une formule de solution pour le problème de Cauchy.

Il s'agit maintenant d'étendre la validité de nos résultats sous deux rapports. L'application de la série (2) donnant V^{α} exigeait en effet d'une part que les coefficients g_{ik} fussent holomorphes et d'autre part que la distance géodésique des points P et Q fût assez petite. Au lieu de supposer que les coefficients sont holomorphes, on n'admettra que l'existence des dérivées jusqu'à un certain ordre. Dans ce cas on ne pourra former la série donnant V^{α}, mais on pourra toujours former un certain nombre des quantités V_k. Dès lors, on pourra, tout comme le fait M. Hadamard, appliquer la méthode de la *parametrix*. Or par cette méthode nous n'obtenons que V^2 (¹) qui ne suffit pas pour donner à la formule (11) la validité générale à laquelle nous tenons. On peut remédier à cet inconvénient de la manière suivante.

Admettons de nouveau un instant que les coefficients g_{ik} soient holomorphes et formons une fonction W^{α} qui joue le même rôle par rapport à l'opérateur $\Delta u + \lambda^2 u$, le nombre λ désignant un nouveau paramètre, que V^{α} joue par rapport à Δu. Posons

$$\begin{aligned} W^{\alpha} &= \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha}{2}}{h} \lambda^{2h} V^{\alpha+2h} \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\frac{\alpha+m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \cdot \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha-m}{2}+k} J_{\frac{\alpha-m}{2}+k}(\lambda s), \end{aligned}$$

où les J sont des fonctions de Bessel. Il est manifeste que W^{α} devient

(¹) Cela tient au fait qu'on connaît $\Delta V^2 (\Delta V^2 = 0)$, mais on ne connaît pas ΔV^{α} d'une manière explicite.

singulier sur le conoïde de la même manière que V^α et l'on vérifie facilement la relation

$$\Delta W^{\alpha+2} + \lambda^2 W^{\alpha+2} = W^\alpha.$$

Dans le cas où les g_{ik} ne sont pas holomorphes mais suffisamment dérivables, on pourra encore par la méthode de la *parametrix* déterminer W^α et alors V^α s'obtient facilement au moyen d'une intégration complexe par rapport au paramètre λ.

Lund, Institut Mathématique
de l'Université, le 26 juin 1938.

SUR UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE

DES

FONCTIONS HARMONIQUES

Par M. S. ZAREMBA.

L'expression « fonction harmonique » n'est pas toujours employée dans un même sens; aussi, pour éviter tout malentendu, je préciserai le sens que je vais lui attribuer dans cette conférence en adoptant la convention suivante :

L'assertion qu'une fonction u de n variables x_1, x_2, ..., x_n est une fonction harmonique, définie dans un certain domaine (D), *exprime qu'en tout point intérieur à ce domaine, chacune des dérivées qui entre dans l'expression* $\Delta(u)$, *définie par la formule*

$$\Delta(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \tag{1}$$

a une valeur déterminée et que l'on a

$$\Delta(u) = 0 \tag{2}$$

en tout point intérieur au domaine (D).

Notons dès maintenant que, dans la suite, nous n'envisagerons que des fonctions harmoniques de variables réelles.

On sait depuis longtemps que, sous certaines conditions de régularité, toute fonction harmonique dans un certain domaine est, dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur de ce domaine, une fonction régulièrement analytique des variables dont elle dépend.

La démonstration donnée ordinairement de ce théorème repose sur le théorème de Green et implique, en dehors de l'hypothèse que la fonction considérée u des variables $x_1, x_3, \ldots, x_n$ est continue, encore celle que les dérivées qui entrent dans l'équation (2) satisfont à quelque condition de régularité; le plus souvent on admet que ces dérivées sont continues à l'intérieur d'un domaine où la fonction considérée est définie.

Pour atteindre le but que nous avons en vue et qui consiste à déterminer les conditions de régularité les moins restrictives assurant l'analyticité d'une fonction harmonique, définie dans un certain domaine, à l'intérieur de celui-ci, commençons par remarquer que le simple fait que l'équation (2) est satisfaite à l'intérieur d'un certain domaine n'assure nullement la continuité de la fonction u à l'intérieur de ce domaine; c'est ce que prouve l'exemple très simple suivant : soit u une fonction des deux variables réelles x_1 et x_2 définie, pour tout système de valeurs de ces variables vérifiant l'inégalité

$$x_1^2 + x_2^2 > 0,$$

au moyen de la formule suivante :

$$u = \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

et se réduisant à zéro pour

$$x_1 = x_2 = 0.$$

On aura alors dans tout le plan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$

et pourtant, pour $x_1 = x_2 = 0$, la fonction u sera discontinue.

Il résulte de ce qui précède que, pour être assuré qu'une fonction u, harmonique à l'intérieur d'un certain domaine (D), est régulièrement analytique dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur de ce domaine, il faut admettre avec nous qu'elle est continue à l'intérieur du domaine considéré ou adopter quelque hypothèse équivalente.

Cela étant, il suffira, pour atteindre le but formulé plus haut, d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Toute fonction u des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, harmonique et continue à l'intérieur d'un certain domaine, est régulièrement analytique dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur du domaine considéré.*

Ce théorème est, comme l'a fait voir M. Wilkosz (1), un corollaire immédiat d'un théorème que j'avais démontré dès 1904 (2).

Les résultats que je vais exposer ne sont donc pas inédits, mais il m'a semblé qu'ils méritaient d'être rappelés.

Voici d'abord la définition d'un symbole qui nous sera très utile :

L'expression $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ représentant une fonction définie sans ambiguïté des variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous définirons le symbole $\Delta[f(x_1, x_2, \ldots, x_n), h]$ que nous avons en vue au moyen de la formule suivante :

$$(3)\quad \Delta[f(x_1, x_2, \ldots, x_n), h] = \frac{\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{f(x_1, \ldots, x_k+h, \ldots, x_n)+f(x_1, \ldots, x_k-h, \ldots, x_n)\} \\ \quad -2nf(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{array}\right\}}{h^2}.$$

L'expression

$$(4)\qquad \lim_{h \to 0}[u(x_1, x_2, \ldots, x_n), h]$$

peut représenter une fonction continue des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sans que les dérivées secondes de la fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ existent.

En effet, dans le mémoire cité il y a un instant, j'ai démontré le théorème suivant :

L'espace euclidien étant rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (x_1, x_2, x_3), désignons par $u(x_1, x_2, x_3)$ le potentiel newtonien dérivant d'une masse de densité $\mu(x_1, x_2, x_3)$ remplissant un domaine borné et mesurable (D). Si, en un point (a_1, a_2, a_3), situé à l'intérieur du domaine (D), la fonction $\mu((x_1, x_2, x_3)$ est continue, alors on a

$$\lim_{n \to 0}[u(a_1, a_2, a_3), h] = -4\pi\mu(x_1, x_2, x_3).$$

(1) *C. R. des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 174, 1922, p. 435.

(2) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XIX, 1905, p. 140.

Or, on sait que la simple continuité de la densité de la masse de laquelle dérive le potentiel newtonien que l'on considère, n'assure pas l'existence des dérivées secondes de ce potentiel. Donc l'assertion énoncée plus haut au sujet de l'expression (4) est bien exacte. Mais lorsqu'une fonction $u(x_1, x_2, x_3)$ admet des dérivées secondes, on a le théorème suivant, dû à M. Wilkosz.

Théorème II. — *Si en un point* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *situé à l'intérieur du domaine où une fonction* $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est définie, l'expression* $\Delta(u)$, *définie par la formule* (1), *a une valeur finie, bien déterminée, on a*

$$\lim_{h \to 0}[u(a_1, a_2, \ldots, a_n), h] = \{\Delta(u)\}_{[x_i = a_i,\ (i=1,2,\ldots,n)]}. \tag{5}$$

Au cas où l'on admettrait la continuité des dérivées qui entrent dans l'expression (1) la démonstration de l'égalité précédente résulterait des propositions qui se trouvent dans tous les manuels d'Analyse mathématique, mais si l'on veut se borner à admettre, comme nous allons le faire, la simple existence des dérivées qui entrent dans l'expression $\Delta(u)$, on est obligé de s'appuyer sur un théorème dû à Peano et qui, ordinairement, n'est malheureusement pas mentionné dans les traités d'Analyse. Voici ce théorème :

Soit $f(x)$ une fonction bien déterminée dans un intervalle (a, b), admettant à l'intérieur de cet intervalle des dérivées déterminées jusqu'à un certain ordre p.

S'il arrive que, pour une valeur particulière x_0 de x, située à l'intérieur de l'intervalle (a, b) la dérivée $f^{(p+1)}(x_0)$ d'ordre $p+1$ de la fonction $f(x)$ ait une valeur finie, bien déterminée, on a la formule suivante :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k)}(x_0)}{\Gamma(k+1)} h^k + \left\{ \frac{f^{(p+1)}(x_0)}{\Gamma(p+2)} + \varepsilon \right\} h^{p+1},$$

où ε est un nombre qui tend vers zéro avec h.

En s'appuyant sur le théorème précédent, on retrouve avec la plus grande facilité la démonstration de M. Wilkosz du théorème II.

Considérons maintenant une fonction continue $u(x_1, x_2, x_n)$, définie à l'intérieur d'un domaine (D) et vérifiant en tout point (x_1, x_2, x_n) situé à l'intérieur de ce domaine, l'équation suivante :

$$\lim_{h \to 0}[u(x_1, x_2, \ldots, x_n), h] = 0.$$

THÉORÈME III. — *L'hypothèse précédente étant vérifiée, la fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction régulièrement analytique dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur du domaine* (D) *et y satisfait à l'équation*

$$\Delta(u) = 0.$$

En effet [1], les hypothèses du théorème étant admises, soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un point quelconque situé à l'intérieur du domaine (D). Désignons par R un nombre positif assez petit pour que toute l'hypersphère (S), définie par la relation

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 \leqq R^2,$$

soit située, avec tous ses points frontières, à l'intérieur du domaine (D). Il existera une fonction v continue à l'intérieur et sur la frontière de l'hypersphère (S), prenant sur la frontière de cette hypersphère les mêmes valeurs que la fonction u et étant harmonique et régulièrement analytique à l'intérieur de l'hypersphère considérée.

D'autre part, il existera une fonction continue w s'annulant sur la frontière de l'hypersphère considérée, régulièrement analytique à l'intérieur de cette hypersphère et y vérifiant l'équation

$$\Delta w = 1.$$

Désignons par η un nombre vérifiant l'équation

$$\eta^2 = 1,$$

par t une indéterminée réelle et posons

$$\psi = \eta(u - v) + t^2 w.$$

En vertu du théorème II, nous aurons

$$\lim_{h \to 0} \Delta(\psi, h) = t^2,$$

en tout point intérieur à l'hypersphère (S), quel que soit le signe du nombre η.

---

[1] Je reproduis la démonstration que j'ai donnée dans le mémoire cité plus haut.

Par conséquent, que l'on ait $\eta = +1$ ou $\eta = -1$, la fonction ψ ne pourra pas avoir un maximum à l'intérieur de l'hypersphère (S), et comme d'autre part la fonction continue $u - v$ s'annule sur la frontière de cette hypersphère elle satisfera à l'intérieur de celle-ci à la relation

$$|u - v| \leqq t^2.$$

Mais cette relation aura lieu si petite que soit la valeur réelle attribuée au nombre t.

Par conséquent, dans toute l'hypersphère (S), on aura

$$u - v = 0.$$

Notre théorème est donc démontré. Actuellement, comme l'a remarqué M. Wilkosz, il est très aisé d'établir le théorème I. En effet, les notations et l'hypothèse de ce théorème étant conservées, on aura, en vertu du théorème II,

$$\lim_{h \to 0} [u(x_1, x_2, \ldots, x_n), h] = \Delta(u),$$

et comme, par hypothèse, on a en tout point situé à l'intérieur du domaine considéré

$$\Delta(u) = 0,$$

il résulte du théorèmeI II, que la fonction u sera, comme il s'agissait de l'établir, régulièrement analytique dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur de ce domaine.

Pour terminer, remarquons qu'en s'appuyant sur le théorème précédent on démontre aisément qu'il existe, en dehors de l'équation des fonctions harmoniques, d'autres équations aux dérivées partielles telles que la simple continuité d'une intégrale d'une de ces équations suffise à en assurer l'analyticité régulière dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur du domaine où elle satisfait à l'équation considérée. Telles sont par exemple les équations de la formule suivante :

$$\Delta(u) + f(x, y, z)\, u = 0,$$

où $f(x, y, z)$ est une fonction régulièrement analytique dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur du domaine où l'on considère cette équation.

S. Zaremba.

SUR
LES FONCTIONS STATISTIQUES

Par M. R. de MISES.

Le théorème dit de Laplace-Tchebychef concernant l'addition de variables aléatoires est assez connu. Sous des conditions très larges on peut démontrer que, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n variables soumises à des lois de probabilité indépendantes, la loi de probabilité de la somme $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ tend vers la fonction de Gauss, n augmentant infiniment. Évidemment au lieu de la somme on peut parler d'une fonction linéaire quelconque des $x_1, x_2, \ldots, x_n$, notamment de leur moyenne arithmétique. Mais il paraît être resté inaperçu jusqu'ici que le même fait s'étend à une classe de fonctions bien plus générale. Toute fonction qui, ainsi que la moyenne arithmétique, ne dépend que de la répartition des valeurs des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jouit, sous certaines conditions, de la propriété citée. Presque toute les fonctions de variables aléatoires que l'on étudie généralement en statistique mathématique, par exemple le coefficient de Lexis, le coefficient de corrélation, etc., appartiennent à cette classe de fonctions. C'est pourquoi je leur ai donné le nom de *fonctions statistiques*. Pour établir les notions et les théorèmes précis dans ce domaine il faut s'appuyer sur les définitions fondamentales, dues au génie de M. Volterra, définitions qui établissent la notion de *fonction de ligne*, de sa dérivée, etc. Je me permettrai dans ce qui suit, d'exposer quelques-uns de mes résultats dont une partie fut antérieurement publiée (1).

(1) Voir les références à la fin de cet article.

1. Fonction statistique. — Nous allons nous servir de deux notions apparentées, mais qu'il faut bien distinguer l'une de l'autre. J'appelle *répartition* des n variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la fonction $S(x)$ définie de sorte que $nS(x)$ donne pour tout x le nombre de ceux parmi les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont la valeur ne dépasse pas x. Il est évident que $S(x)$ est une fonction monotone, non décroissante, représentée par une ligne-escalier qui monte de 0 à 1 par des marches dont les hauteurs sont des multiples entiers de $\frac{1}{n}$.

De l'autre côté toute fonction $V(x)$ monotone et non décroissante qui monte de 0 à 1 de façon quelconque sera dénommée une *distribution*. Toute répartition de n variables est ainsi une distribution particulière. Dans tout problème de probabilité (dans tout collectif) à une seule dimension l'ensemble des probabilités est donné par une telle distribution, $V(x)$ désignant la probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire (du caractère distinctif du collectif) ne dépasse pas x.

Soit maintenant E un ensemble de distributions qui comprend au moins un certain nombre de répartitions. Un tel ensemble auquel appartiennent $V_1(x)$ et $V_2(x)$ sera dit *convexe*, si $V_1 + t(V_2 - V_1)$ lui appartient aussi, pour toute fraction proprement dite t. Attachons à tout élément $V(x)$ de E un nombre réel f; nous appellerons f une *fonction statistique définie sur* E et nous la désignerons par $f\{V(x)\}$. Si la *variable indépendante* $V(x)$ devient égale à la répartition $S(x)$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, f ne dépend que de ces n variables et nous dirons aussi que $f\{S(x)$ est une fonction statistique des $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

L'exemple le plus simple d'une fonction statistique s'écrit sous la forme d'une intégrale de Stieltjes comme il suit

$$f\{V(x)\} = \int x\, dV(x). \tag{1}$$

Quand $V(x)$ est la distribution des probabilités dans un collectif, f est *l'espérance mathématique de* x; si l'on prend pour $V(x)$ la répartition de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, alors f est leur moyenne arithmétique. En remplaçant x sous le signe dans (1) par une fonction quelconque $\varphi(x)$ on reçoit toujours une fonction statistique *linéaire*, définie pour toutes les $V(x)$ pour lesquelles l'intégrale existe. Soient

$$A = \int \alpha(x)\, dV(x), \quad B = \int \beta(x)\, dV(x), \quad \ldots, \tag{2}$$

de telles intégrales de Stieltjes, toute fonction F(A, B, ...) sera une fonction statistique, en général non linéaire. Dans cet ordre d'idées entrent par exemple, les écarts d'ordre n rapportés à la valeur moyenne a, les coefficients de Lexis et de Gini et presque toutes les autres caractéristiques dont on se sert en statistique mathématique. Citons encore comme exemple d'une fonction statistique d'autre nature l'intégrale double

$$(3) \qquad f\{V(x)\} = \iint \psi(x, y)\, dV(x)\, dV(y).$$

On voit bien que les fonctions statistiques constituent un cas particulier des *fonctions de ligne* introduites par M. Volterra.

2. Dérivées et formule de Taylor. — Il y aura lieu d'introduire la notion de dérivée et de formule Taylorienne pour une fonction statistique. Soient $V_1(x)$ une distribution fixe et $V(x)$ une distribution variable, toutes les deux appartenant à l'ensemble convexe E sur lequel la fonction f est définie. Nous dirons que f est dérivable *au point* $V_1(x)$, s'il existe une fonction f' qui dépend de $V_1(x)$ et d'une variable y, mais pas de $V(x)$, telle que

$$(4) \quad \frac{d}{dt} f\{V_1(x) + t(V - V_1)(x)\}_{t=0} = \int f'\{V_1(x), y\}\, d(V - V_1)(y).$$

Cette fonction $f'\{V_1(x), y\}$ sera appelée la dérivée de $f\{V(x)\}$ au *point* $V_1(x)$.

Pour toute fonction linéaire $f = \int \alpha(x)\, dV(x)$ la dérivée est indépendante de $V_1(x)$ et égale à $\alpha(y)$. Dans le cas $f = F(A, B, \ldots)$ où A, B, ... sont définies par (2), on trouve

$$(5) \qquad f'\{V(x), y\} = \frac{\partial F}{\partial A}\alpha(y) + \frac{\partial F}{\partial B}\beta(y) + \ldots.$$

Pour l'écart d'ordre m on a

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} f = M_m = \int (x - a)^m\, dV, \qquad a = \int x\, dV, \\ f' = (y - a)^m - m M_{m-1} y. \end{aligned} \right.$$

La fonction non linéaire (3) admet la dérivée

$$(7) \qquad f'\{V(x), y\} = \int [\psi(x, y) + \psi(y, x)]\, dV(x).$$

D'une façon analogue on définit une dérivée de deuxième ordre au point $V_1(x)$ qui dépendra en général de $V_1(x)$ et de deux variables ordinaires y, z. Ainsi on peut établir une formule Taylorienne pour la fonction statistique $f\{V(x)\}$ qui est supposée deux fois dérivable sur tout le *segment* menant de $V_1(x)$ à $V(x)$

$$(8)\qquad f\{V(x)\}-f\{V_1(x)\}=\int f'\{V_1(x),y\}\,d(V-V_1)(y)$$
$$+\frac{1}{2}\iint f''\{V_2(x),y,z\}\,d(V-V_1)(y)\,d(V-V_1)(z).$$

Ici $V_2(x)$ est une distribution appartenant au *segment* en question, c'est-à-dire que

$$(9)\qquad V_2(x)=V_1(x)+\vartheta(V-V_1)(x),\qquad 0\leqq\vartheta\leqq 1.$$

3. **Le problème.** — Abordons maintenant le problème du calcul des probabilités dont il s'agit dans le cas du premier théorème fondamental. On a une suite infinie de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dont chacune est assujettie à une certaine distribution (loi des probabilités) $V'_1(x)$, $V'_2(x)$, $V'_3(x)$, ... En d'autres termes, la probabilité pour que la $\nu^{\text{ième}}$ variable ne dépasse pas la valeur x est égale à $V'_\nu(x)$. Une expérience effectuée sur les n premiers de ces collectifs fournira un certain système de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et nous désignerons par $S_n(x)$ la répartition de ces n valeurs. Soit maintenant f une fonction statistique quelconque, par exemple (pour fixer les idées) l'écart d'ordre m

$$(10)\qquad f\{S_n(X)\}=\int (x-a)^m\,dS(x)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-a)^m,$$

où a désigne la moyenne arithmétique $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On demande :

Quelle est la probabilité $P'_n(X)$ pour que la valeur $f\{S_n(x)\}$ ne dépasse pas X et notamment quelle est l'allure asymptotique de la distribution $P'_n(X)$?

Notre déduction sera basée sur *le lemme* suivant : soient A_n et B_n, pour tout entier n, deux fonctions dépendant de certaines variables aléatoires, de sorte qu'il existe des distributions $P_n(X)$ pour A_n et $Q_n(X)$ pour B_n [c'est-à-dire que $P_n(X)$ est la probabilité pour que A_n ne dépasse pas X, etc.]; alors si $Q_n(X)$ pour n infini s'approche d'une distribution $\Phi(X)$ à dérivée bornée et que, en même temps, l'espérance mathématique de $|A_n - B_n|$ tend vers zéro, $\Phi(X)$ sera également la limite de $P_n(X)$. La démonstration en est tout à fait élémentaire.

4. Démonstration. — Nous portons dans la formule Taylorienne (8) $S_n(x)$ à la place de $V(x)$ et la moyenne arithmétique des distributions V'_ν données

$$(11) \qquad V_n(x) = \frac{1}{n}[V'_1(x) + V'_2(x) + \ldots + V'_n(x)]$$

à la place de $V_1(x)$. En multipliant les deux membres par une constante H_n dont la valeur sera précisée tout de suite nous posons

$$(12) \qquad \begin{cases} A_n = H_n[f\{S_n(x)\} - f\{V_n(x)\}], \\ B_n = H_n \displaystyle\int f'\{V_n(x), y\}\, dT_n(y), \end{cases}$$

où T signifie la différence $S_n - V_n$. Ainsi l'équation (8) fournit

$$(13) \qquad A_n - B_n = \frac{1}{2} H_n \iint f''\{V(x), y, z\}\, dT_n(y)\, dT_n(z),$$

où $V(x)$ désigne une certaine distribution appartenant au segment de $S_n(x)$ à $V_n(x)$. Pour pouvoir appliquer le lemme cité ci-dessus il faut prouver que la distribution de B_n tend vers la Gaussienne et que l'espérance mathématique de la valeur absolue de (13) tend vers zéro.

Quant à la première de ces propositions il suffit de remarquer que B_n est une fonction statistique *linéaire* de $S_n(x)$. En effet, pour une distribution $V_n(x)$ fixe, l'expression $f'\{V_n(x), y\}$ est simplement une fonction de la variable y et, sauf le facteur, H_n/n, la première partie de

$$(14) \qquad B_n = \frac{H_n}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f'\{V_n(x), x_\nu\} - \frac{H_n}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \int f'\{V_n(x), y\}\, dV'_\nu(y)$$

est la *somme* des valeurs de cette fonction pour $y = x_1, x_2, \ldots, x_n$, tandis que la deuxième partie n'est qu'une constante. Donc nous n'aurons qu'à demander que les distributions $V'_\nu(y)$ considérées comme distributions des variables transformées $f'\{V_n(x), y\}$ satisfassent aux conditions pour que le théorème de limite classique soit valable. Par exemple, si l'on pose pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$(15)\qquad \begin{cases} a_\nu = \int f'\{V_n(x), y\}\, dV'_\nu(y), \\ r_\nu^2 = \int [f'\{V_n(x), y\} - a_\nu]^2\, dV'_\nu(y) \\ C_\nu = \int [f'\{V_n(x), y\} - a_\nu]^{2+\varepsilon}\, dV'_\nu(y), \\ \qquad (s_n^2 = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2), \end{cases}$$

il suffira que, pour un certain ε positif, les C_ν soient bornés et que l'expression $n^{-\frac{2}{2+\varepsilon}} s_n^2$ tende vers l'infini avec n. Mais naturellement on peut substituer pour (15) un autre système de conditions suffisantes, conformément aux théories connues. En tout cas on aura pour la distribution Q_n de B_n, si H_n/n est choisi égal à $\frac{1}{\sqrt{2}\, s_n}$,

$$(16)\qquad \lim_{n\to\infty} Q_n(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-u^2}\, du.$$

5. **Fin de la démonstration. Énoncé.** — Tout dépend maintenant d'une appréciation de l'espérance mathématique de l'expression (13). Nous nous appuyerons sur le fait suivant qui, en substance, se déduit de l'inégalité bien connue de Tchebychef. Soit $\psi(x)$ une fonction non négative et

$$(17)\qquad J = \int \psi(x)\, [S_n(x) - V_n(x)]^2\, dx,$$

on aura pour l'espérance mathématique $E\{J\}$

$$(18)\qquad E\{J\} \leqq \frac{1}{n} \int \psi(x)\, V_n(x)\, [1 - V_n(x)]\, dx.$$

Pour appliquer cette formule nous restreignons les fonctions f admises à celles dont la deuxième dérivée $f''\{V(x), y, z\}$ dans un *point* quelconque $V(x)$ de l'ensemble convexe défini par les $V_n(x)$ satisfait la condition qui suit : il existe une fonction non négative $\psi(x)$ telle que pour $T_n(x) = S_n(x) - V_n(x)$ l'inégalité

$$(19)\qquad \left| \iint f''\{V(x), y, z\}\, dT_n(y)\, dT_n(z) \right| \leqq \int \psi(x)\, T_n^2(x)\, dx,$$

entraîne la relation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{s_n} \int \psi(x) V_n(x) [1 - V_n(x)]\, dx = 0. \tag{20}$$

Étant donné que H_n est égal à $\frac{n}{s_n\sqrt{2}}$ on voit que sous cette condition l'espérance mathématique de $|A_n - B_n|$ reste au-dessous d'une borne qui tend vers zéro si n augmente infiniment. Ainsi le résultat est établi que

$$\lim_{n \to \infty} P_n(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{X} e^{-u^2}\, du, \tag{21}$$

si $P_n(X)$ signifie la probabilité de l'inégalité $f\{S_n(x)\} \leqq \frac{X}{H_n}$.

Résumons les conditions auxquelles $f\{S_n(x)\}$ doit répondre pour que (21) soit valable :

1° La fonction statistique $f\{S_n(x)\}$ est deux fois dérivable;

2° La première dérivée $f'\{S_n(x), y\}$ remplit les conditions qui découlent du théorème classique pour les fonctions linéaires;

3° La deuxième dérivée $f''\{S_n(x), y, z\}$ remplit la condition exprimée par (19) et (20).

Ajoutons que pour les fonctions statistiques de la forme $f = F(A, B, \ldots)$ où A, B, ... sont des simples intégrales de Stieltjes (2), la troisième condition prend une forme plus maniable qui permet de décider facilement dans quel cas elle est remplie. Citons enfin la fonction statistique

$$\omega^2\{V(x)\} = \int \lambda(x) [S_n(x) - V_n(x)]^2\, dx$$

comme exemple d'une fonction dont la première dérivée s'annule identiquement, de sorte que notre théorème n'y est pas applicable.

REFÉRENCES.

a. *Ergänzungssätze zu den Gesetzen der grossen Zahlen.* Dans mon livre : (*Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen*, Leipzig und Wien, Deuticke 1931, p. 102-197). Ici les lois des grands nombres pour les fonctions statistiques (sans introduire ce nom) sont déduites pour le cas de distributions discontinues.

b. Deux nouveaux théorèmes de limite dans le calcul des probabilités (*Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul*, t. 1, 1935, fasc. 1, p. 61-80). Les deux théorèmes de limite pour les fonctions statistiques sont signalés sans démonstrations.

c. Die Gesetze der grossen Zahl für statistische Funktionen. [*Monatshefte für Mathematik und Physik*, Bd. 43, (Wirtinger-Festband), 1936, p. 105-128.] Démonstrations complètes des lois des grands nombres (y compris la loi forte des grands nombres) pour les fonctions statistiques.

d. Les lois des probabilités pour les fonctions statistiques (*Annales de l'Institut Henri Poincaré*, vol. 6, 1936, p. 185-212). Démonstration complète du premier des théorèmes de limite.

R. DE MISES
(Istanbul).

Journée du 10 juillet 1937.

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE STIELTJES

ET

CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER

Par M. L.-C. YOUNG.

Mesdames, Messieurs,

Je voudrais d'abord exprimer ma vive reconnaissance au Comité de la Société Mathématique pour son aimable invitation. C'est un grand honneur pour moi de faire une Conférence devant une assemblée de mathématiciens qui compte parmi ses membres des maîtres pour lesquels j'éprouve depuis longtemps une profonde admiration. D'ailleurs le sujet dont je vais avoir l'honneur de vous parler est la conséquence logique des recherches auxquelles l'école française des Mathématiques s'est particulièrement consacrée depuis plus d'un siècle.

Il s'agit en effet d'un développement nouveau et très simple de la théorie de l'intégrale. Le but principal de ce développement est d'obtenir des théorèmes *dintégration terme à terme* qui n'exigent plus les conditions classiques d'intégrabilité absolue de M. Lebesgue, mais qui, bien entendu, exigent d'autres conditions de nature assez différente. Les idées que je vais vous exposer conduisent en même temps à une extension de l'intégrale de Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

L'existence de cette intégrale se trouvera en effet assurée par des conditions tout à fait symétriques entre la fonction f et la fonction g.

Les conditions dont nous aurons besoin sont de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \left\{ \displaystyle\int_a^b |f(x+h)-f(x)|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \varphi(h) \\ \left\{ \displaystyle\int_a^b |g(x)-g(x-h)|^{p'}\,dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqq \psi(h), \end{cases}$$

où p et p' sont des nombres positifs astreints à satisfaire la condition $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ et où $\varphi(h)$, $\psi(h)$ sont des fonctions croissantes de $|h|$ dont le produit satisfait à une condition supplémentaire que nous obtiendrons dans un instant. Ces conditions sur f et g sont donc du type de *Lipschitz intégrées,* elles ont été utilisées constamment dans d'autres domaines par MM. Hardy et Littlewood, par exemple, dans le cas où $\varphi(h)$ et $\psi(h)$ sont des puissances fractionnaires de h. Ces conditions ont d'ailleurs des rapports étroits avec une notion due à M. Norbert Wiener et qui généralise de façon directe la notion de variation bornée au sens de Jordan. Dans un mémoire d'il y a une année, j'ai utilisé la notion de M. Wiener, mais il est un peu plus commode de se servir de celle de Lipschitz intégrée. La notion de M. Wiener, qui a du reste été employée récemment par M. Denjoy, comme a bien voulu me le signaler M. Fréchet, c'est la suivante : une fonction f est dite *à variation de puissance p-ième bornée* si la somme de puissances p-ièmes d'accroissements

$$\sum_i |f(x_{i+1})-f(x_i)|^p$$

reste inférieure à une borne indépendante de la suite croissante de points x_i. Je signale cette notion ici parce que j'y reviendrai encore dans les applications trigonométriques.

Maintenant quelques mots sur la méthode tout à fait élémentaire que je vais employer. D'abord accordez-moi de faire quelques hypothèses simplificatrices : au lieu de (a, b) j'écrirai simplement $(0, 1)$ et je supposerai que f et g sont des fonctions bornées mesurables (au sens de M. Lebesgue) et en outre périodiques avec la période 1. Ensuite pour plus de commodité, j'entendrai par l'intégrale de Stieltjes

$$\int_0^1 f(x)\,dg(x)$$

la dérivée pour $t=0$ de la fonction

$$-F(t) = -\int_0^1 f(x)g(x-t)\,dx = -\int_0^1 f(x+t)g(x)\,dx$$

par rapport à la suite binaire, c'est-à-dire la limite

$$\lim_{\nu\to\infty} 2^\nu\{F(0)-F(2^{-\nu})\}.$$

Cette définition un peu artificielle coïncide évidemment avec celle de Stieltjes dans le cas où f et g possèdent des dérivées continues puisque

$$\int_0^1 f(x)\,\frac{g(x)-g(x-h)}{h}\,dx \to \int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dg(x)$$

lorsque $h\to 0$ dans ce cas particulier. On démontre d'ailleurs sans peine que la définition que j'utilise comprend aussi celle au sens classique de Stieltjes.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dg(x) &= \lim_{h=2^{-\nu},\,\nu\to\infty} \int_0^1 f(x)\left\{\frac{g(x)-g(x-h)}{h}\right\}dx \\ &= \lim_{h=2^{-\nu},\,\nu\to\infty} -\int_0^1 \left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\} g(x)\,dx.\end{aligned}$$

On voit bien par ces formules quel parti on peut tirer d'une condition portant sur la seule différence $g(x)-g(x-h)$ ou sur la seule différence $f(x+h)-f(x)$. Mais voilà que justement nous voulons tirer parti à la fois de la condition

$$\left\{\int_0^1 |f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \varphi(h)$$

et de la condition

$$\left\{\int_0^1 |g(x-h)-g(x)|^{p'}\,dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \leqq \psi(h).$$

Il nous faudra donc procéder d'une façon un peu plus subtile, et c'est ici qu'intervient le choix que nous avons fait $h=2^{-\nu}$.

On a, en effet, l'identité

$$\frac{F(2h)-F(0)}{2h}-\frac{F(h)-F(0)}{h}$$
$$=\frac{1}{2h}\{F(2h)-2F(h)+F(0)\}$$
$$=\frac{1}{2h}\int_0^1\{f(x+h)-f(x)\}\{g(x)-g(x-h)\}\,dx,$$

ce qui est majoré en valeur absolue par $\frac{\varphi(h)\psi(h)}{2h}$, en vertu de l'inégalité classique de Hölder. Donc, en sommant pour $h=2^{\nu+1}, 2^{\nu+2}, \ldots$, on trouve

$$\left|2^{\nu}\{F(2^{-\nu})-F(0)\}+\int_0^1 f(x)\,dg(x)\right|\leqq\sum_{\mu=\nu}^{\infty}2^{\mu-1}\varphi(2^{-\mu})\psi(2^{-\mu}),$$

d'où il résulte, par monotonie, que

$$\left|2^{\nu}\{F(2^{-\nu})-F(0)\}+\int_0^1 f(x)\,dg(x)\right|\leqq\int_0^{2^{-\nu}}\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^2}\,du.$$

On voit ainsi que *si f et g remplissent les conditions* (I) *et si $\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^2}$ est intégrable au voisinage de $u=0$, alors l'intégrale de Stieltjes de f et g existe et l'on a pour $h=2^{-\nu}$* $(\nu=1, 2, \ldots)$ *l'inégalité*

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dg(x)-\int_0^1 f(x)\left\{\frac{g(x)-g(x-h)}{h}\right\}dx\right|\leqq\int_0^h\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^2}\,du.$$

De ce résultat on déduit tout de suite le théorème désiré d'intégration terme à terme, que nous allons formuler d'une façon qui rappelle un peu certains *théorèmes Taubériens* de la théorie des séries.

Supposons que $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ sont deux suites de fonctions sujettes aux conditions

$$\left\{\int_0^1|f_n(x+h)-f_n(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq\varphi(h),$$
$$\left\{\int_0^1|g_n(x)-g_n(x-h)|^{p'}\,dx\right\}^{\frac{1}{p'}}\leqq\psi(h),$$

où $\varphi(u)$ *et* $\psi(u)$ *sont des fonctions croissantes de* $|u|$ *telles que* $\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^2}$ *soit intégrable au voisinage de* $u = 0$. *Supposons en outre que, pour chaque* t,

$$\int_0^1 f_n(x)\, g_n(x-t)\, dx \to \int_0^1 f(x)\, g(x-t)\, dx,$$

les fonctions f *et* g *étant elles-mêmes astreintes à remplir les conditions* (I). *Alors*

$$\int_0^1 f_n(x)\, dg_n(x) \to \int_0^1 f(x)\, dg(x).$$

En effet, si l'on se donne $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir une valeur particulière $t = 2^{-\nu}$ pour laquelle

$$\int_0^t \frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^2}\, du < \varepsilon,$$

et l'on constate qu'à ε près on peut remplacer les intégrales de Stieltjes dont il s'agit, c'est-à-dire les dérivées binaires d'intégrales de Lebesgue, par les quotients de différences finies

$$\int_0^1 f_n(x)\, \frac{g_n(x) - g_n(x-t)}{t}\, dx$$

et

$$\int_0^1 f(x)\, \frac{g(x) - g(x-t)}{t}\, dx;$$

et t étant fixe, la première tend évidemment vers la dernière.

Je passe maintenant aux applications à la convergence des séries de Fourier. Ces applications dépendent d'une propriété fondamentale très simple de la fonction

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt. \tag{II}$$

Cette propriété s'écrit

$$\sum_i \Psi[\,|g(x_{i+1}) - g(x_i)|\,] < \mathrm{B} \sum_n \Psi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{III}$$

où $\Psi(u)$ désigne une fonction arbitraire assujettie aux conditions

$$\Psi(u_1) + \Psi(u_2) \leqq \Psi(u_1 + u_2)$$

pour $u_1 > 0$ et $u_2 > 0$, et où B désigne une constante absolue (indépendante par conséquent de la fonction Ψ et de la suite croissante des points x_i). La démonstration de ce fait est élémentaire, on la trouvera dans un mémoire qui va paraître dans les *Mathematische Annalen*. Elle ne comporte, du reste, aucune difficulté.

On connaît le rôle de notre fonction (II) dans la théorie des séries de Fourier. On a, en effet, en désignant par $s_n(x)$ la somme des $2n+1$ premiers termes de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ et par $s(x)$ une fonction arbitraire

$$s_n(x) - s(x) = \int_0^\infty f_n(t)\, dg(t),$$

où la fonction $f_n(t)$ (qui dépend de x) ne diffère que par un facteur trivial de l'expression

$$\begin{array}{ll} f\left(x+\dfrac{t}{n}\right) + f\left(x-\dfrac{t}{n}\right) - 2s(x) & (0 \leqq t \leqq n) \\ 0 & (t > n). \end{array}$$

Pour utiliser nos résultats concernant les intégrales de Stieltjes, nous commençons par faire un petit changement de variable $\tau = \varpi(t)$ qui transforme notre intégrale de la façon suivante

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^\infty f_n(t)\, dg(t) = \int_0^1 f_n^\star(\tau)\, dg^\star(\tau),$$

les fonctions $f_n^\star$ et $g^\star$ étant périodiques de période 1. Il suffit pour cela de choisir pour $\varpi(t)$ une combinaison linéaire, à coefficients positifs, de t et de la borne supérieure, variable avec t, qui est celle des sommes au premier membre de (III) lorsqu'on impose la condition supplémentaire $x_i \leqq t$. Lorsque $\tau = \varpi(t)$, on écrit par définition $f_n^\star(\tau) = f_n(t)$, $g^\star(\tau) = g(t)$ pour les valeurs de τ prises par $\varpi(t)$. Si l'on s'arrange comme on le peut évidemment, à ce que ces valeurs de τ constituent un intervalle de longueur inférieure à $\frac{1}{2}$, on complète encore de façon triviale la définition de $f_n^\star(\tau)$, $g^\star(\tau)$ de manière à les rendre périodiques de période 1, tout en faisant que la relation (IV) soit valable, et tout en s'arrangeant que l'on ait

$$|g^*(\tau+h)-g^*(\tau)|=O[\psi(h)],$$

où $\psi(u)$ est la fonction inverse de $\Psi(u)$, cette dernière étant supposée de plus croissante.

En utilisant notre théorème d'intégration terme à terme, on voit maintenant que

$$\int_0^1 f_n^*(\tau)\,dg^*(\tau) \to 0$$

pourvu que, d'une part,

$$\text{(V)} \qquad \int_0^1 |f_n^*(\tau+h)-f_n^*(\tau)|\,d\tau=O[\varphi(h)],$$

où $\varphi(u)$ est une fonction croissante telle que $\dfrac{\varphi(u)\,\psi(u)}{u^2}$ soit intégrable, et pourvu que, d'autre part,

$$\text{(VI)} \qquad \int_0^1 f_n^*(\tau+h)\,g^*(\tau)\,d\tau \to 0$$

quel que soit h. Il s'ensuit que *les conditions* (V) *et* (VI) *suffisent à assurer la convergence de la série de Fourier donnée vers la somme* $s(x)$.

J'avouerai que je n'ai pas analysé en détail les conditions (V) et (VI); je remarquerai cependant que la condition (VI) est remplie dans le cas d'une fonction $f(x)$ bornée et mesurable pour laquelle au point x considéré la série de Fourier converge en moyenne arithmétique d'un ordre quelconque vers $s(x)$. C'est certainement le cas en un point de discontinuité de première espèce si l'on choisit

$$s(x)=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Quant à la condition V, elle est certainement vérifiée si l'on suppose que, en désignant par $\Phi(u)$ la fonction inverse de $\varphi(u)$, l'on ait

$$\sum_i \Phi[\,|f_n^*(\tau_i)-f_n^*(\tau_{i-1})|\,]<B_1,$$

où B_1 est une constante indépendante de n et de la suite croissante de points τ_i contenus dans une même période. Or le membre gauche de cette inégalité devient une somme toute semblable relative à la fonction f si l'on fait un très simple changement de variable. Donc la condition (V) est remplie si l'on a

$$\text{(VII)} \qquad \sum_i \Phi[\,|f(x_i)-f(x_{i-1})|\,] < B_1,$$

quelle que soit la suite croissante de points x_i contenus dans une période de f.

En choisissant pour Φ et Ψ certaines fonctions spéciales, on arrive ainsi à des extensions de théorèmes classiques de Jordan et de Dini-Lipschitz, par exemple la suivante dont j'ai esquissé récemment une démonstration différente aux *Comptes rendus*.

Soit pour u suffisamment petit et positif. $\Phi(u)=\exp(u^{-\alpha})$ *où* $\alpha<\frac{1}{2}$, *et soit $f(x)$ une fonction périodique pour laquelle la condition* (VII) *est remplie. Alors la série de Fourier de $f(x)$ converge vers* $\frac{\{f(x+0)+f(x-x)\}}{2}$.

L'analogie avec le critère de Dini-Lipschitz suggère du reste la possibilité d'étendre encore cet énoncé au cas $\alpha \leq 1$. Je n'ai cependant pas encore pu démontrer une telle extension.

Toute une série de problèmes intéressants se posent encore dans les ordres d'idées que je vous ai exposés. Un de ceux-ci qui a également des rapports étroits avec la théorie des séries trigonométriques a été partiellement résolu par mon compatriote M. Littlevood.

Soient f et g deux fonctions périodiques ayant dans une période la variation de puissance $p^{\text{ième}}$ et $q^{\text{ième}}$ respectivement bornée, et soit

$$\theta(u)=\int_0^1 f(x+u)\,dg(x).$$

On peut montrer que $\theta(u)$ est à variation de puissance λ bornée pour tout λ positif tel que

$$\frac{1}{\lambda}<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1.$$

Ce résultat se démontre d'ailleurs aussi par la méthode de dérivation binaire que j'utilise ici. Le problème qui reste est de savoir si l'on peut prendre aussi

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Je ne suis pas à même de répondre à cette question qui paraît très difficile.

Je mentionnerai encore un problème qui se pose lorsque l'on considère notre intégrale de Stieltjes comme une fonctionnelle définie dans un champ fonctionnel en somme *plus restreint* que celui des fonctions continues. Nous savons depuis MM. Hadamard, Fréchet et F. Riesz, caractériser les fonctionnelles linéaires dans certains champs qui comprennent les fonctions continues, par exemple le champ des fonctions à carré intégrable. Le problème d'une caractérisation analogue dans des champs plus restreints tel que celui des fonctions f qui remplissent la condition de Lipschitz fractionnaire

$$|f(x+h) - f(x)| = O[|h|^{\alpha}]$$

paraît plus difficile. Je n'ai obtenu que des résultats incomplets dans cette direction.

Pour terminer je dirai encore qu'il y a dans l'ordre d'idées des méthodes que j'ai esquissées ici des problèmes intéressants qui concernent les *iutégrales multiples* ou encore l'*intégrale fractionnaire*, c'est-à-dire celle de « Riemann-Liouville » dont nous avons appris une application nouvelle dans la belle conférence de M. Marcel Riesz.

L.-C. Young.

TABLE DES MATIÈRES.

111060-39 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

111060 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

Prix : 110 fr.